

Федеральное агентство по образованию

**ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

И.И. Бандурин, Н.И. Солнышкин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Расчет электромагнитных полей

**Методические указания к расчетно-графическим работам по курсу
«Теоретические основы электротехники ч.3»**

(для студентов электромеханического факультета всех формы обучения)

Псков
Издательство ППИ
2009

УДК 621.3
ББК 31.2
С 60

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
Псковского государственного политехнического института*

Рецензент

- Хитров А.И., доцент кафедры электропривода и систем автоматизации ППИ

И.И. Бандурин, Н.И. Солнышкин. Расчет электромагнитных полей. Методические указания к расчетно-графическим работам по курсу «Теоретические основы электротехники». Для студентов электромеханического факультета сокращенной формы обучения. Псковский государственный политехнический институт. – Псков.: Изд-во ППИ, 2009 – 22с.

В данной работе приведены задания и методические указания по расчету электромагнитных полей. Даны примеры решения задач.

Предназначено для студентов электромеханического факультета всех форм обучения, изучающих «Теоретические основы электротехники».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Общие указания.....	5
Выбор варианта:	5
Правила оформления работы.....	5
1. Электростатическое поле.....	6
Задача 2.....	9
2. Электростатическое поле постоянного тока	15
3. Магнитное поле постоянного тока.	22
4. Переменное электромагнитное поле	25
Литература.....	39
Приложение 1	40
Образец оформления титульного листа.....	40
Цилиндрические Функции (Функции Бесселя)	41

Введение.

Полноценное изучение курса «Теоретические основы электротехники» возможно лишь в том случае, если оно сопровождается решением задач по каждому разделу.

Для решения задач, входящих в задание, необходимо предварительно изучить соответствующий материал по учебнику. В соответствии с этим основные теоретические положения, законы, формулы считаются уже известными студентам. Методические указания к решению задач, помещенные в настоящей работе, разъясняют практические вопросы применения общих методов, изложенных в теоретическом курсе.

Настоящие задания по ТОЭ предназначены для студентов электротехнических и электроэнергетических направлений. Задания охватывают все разделы по теории электромагнитного поля курса ТОЭ.

Общие указания

Выбор варианта:

Групповой вариант определяет преподаватель, ведущий практические занятия в группе.

Индивидуальный вариант студентов соответствует порядковому номеру, под которым студент записан в групповом журнале у преподавателя.

Для студентов заочной формы обучения индивидуальный вариант соответствует сумме двух последних цифр шифра (номера зачетной книжки студента).

Правила оформления работы

1. Расчетная работа выполняется на отдельных листах, используя только одну сторону листа. Образец выполнения титульного листа приведен в приложении 1. На листах следует оставлять поля шириной не менее 4 см для замечаний преподавателей. Работа сшивается по большей (левой) стороне листа.

2. Задание должно быть полностью внесено в работу. Работа должна содержать все пункты задания.

3. Рисунки, графики, схемы, в том числе и заданные условием задачи, должны быть выполнены аккуратно и в удобочитаемом масштабе, в соответствии с действующими стандартами.

4. При построении кривых выбирать такой масштаб, чтобы на 1 см оси координат приходилось $1 \cdot 10^{\pm n}$ или $2 \cdot 10^{\pm n}$ единиц измерения физической величины, где n - целое число. Градуировку осей выполнять, начиная с нуля, равномерно через один или два сантиметра. Числовые значения координат точек, по которым строятся кривые, не приводить. Весь график в целом и отдельные кривые на нем должны иметь название.

5. Общий план решения и все математические действия должны иметь достаточно полные пояснения.

6. Исходные формулы, промежуточные и окончательные результаты должны быть четко выделены из общего текста. В окончательных результатах для каждой величины должна быть указана размерность в соответствии с международной системой единиц СИ.

7. Работа должна быть датирована и подписана студентом.

8. Работа засчитывается, если решения не содержат ошибок и выполнены перечисленные требования.

9. Если работа выполнена неверно, она должна быть выполнена заново. Если неправильно выполнена часть задания, то все необходимые поправки делают на отдельных листах (сохраняя первоначальный вариант без изменения!).

1. Электростатическое поле

Задача 1

1. Объемный заряд распределен равномерно с объемной плотностью между обкладками конденсатора. Тип конденсатора (плоский или цилиндрический). Напряжение между обкладками равно $U_0 = 100V$. Диэлектрическая проницаемость среды равна ϵ_0 . Параметры конденсатора приведены в табл. 1.1, 1.2 и 1.3

Допущение: пренебречь краевым эффектом.

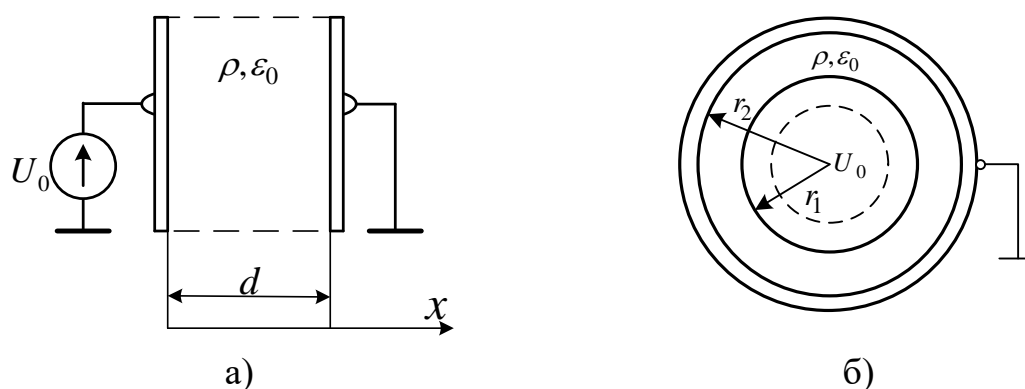


Рис. 1.1

Требуется:

1. Найти выражение потенциала U точек, лежащих между обкладками конденсатора, используя уравнение Пуассона.
2. Найти напряженность электрического поля между обкладками.
3. Построить зависимости потенциала и напряженности электрического поля от расстояния, отсчитываемого вдоль линии напряженности.
4. Найти поверхностную плотность электрического заряда на обкладках конденсатора.

Таблица 1.1

Параметры плоского конденсатора

Инд. вар. Парам.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
S, см ²	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	21	22	23	24	25
d, мм	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	28	10	12	14	16	18	20	22	24	26	11	12	13	14	15

Таблица 1.2

Параметры цилиндрического конденсатора

Инд. вар. Парам.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
l , см	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	18	22	23	24	25
r_1 , мм	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	16	11	12	13	14	15
r_2 , мм	10	12	14	13	15	16	18	20	22	20	22	24	19	20	22	24	25	26	22	24	21	22	23	24	25

Таблица 1.3

Парам.	Групповой вар.					
	1	2	3	4	5	6
U_0 , В	100	200	300	400	500	600
ρ , $\frac{Кл}{м^3} \cdot 10^{-6}$	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Указания

В зависимости от варианта задачи уравнение Пуассона следует записать в декартовой прямоугольной или цилиндрической системе координат.

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

где r, θ, z - цилиндрические координаты точки.

При рациональном выборе начала координат и направлении координатных осей эти уравнения в рассматриваемых задачах существенно упрощаются. Например, если в цилиндрическом конденсаторе ось z направлена вдоль оси конденсатора, то с учетом допущения имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Интегрирование такого уравнения не представляет затруднений.

Постоянные интегрирования определяются из заданных в условии задачи граничных условий.

Пример 1. Дан плоский конденсатор с равномерно распределенным объемным зарядом ρ между обкладками. Расстояние между обкладками равно d (рис. 1.2). Конденсатор замкнут накоротко.

Пренебрегая краевым эффектом, найти потенциал и напряженность в произвольной точке, лежащих между обкладками.

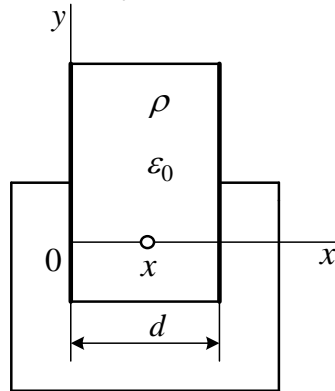


Рис. 1.2

Расположим оси координат, как показано на рис. 1.2. Уравнение Пуассона в декартовой системе координат примет вид

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$U = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon} + C_1x + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Так как конденсатор замкнут накоротко, потенциал левой и правой обкладок одинаков. Можно положить их равными нулю. При этом граничные условия формулируются в виде соотношений

$$U_{x=0} = 0; \quad U_{x=d} = 0.$$

Используя их, получаем

$$C_1 = \frac{\rho d}{2\varepsilon}; \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, потенциал точки с координатой x

$$U = \frac{\rho x}{2\varepsilon}(d - x).$$

Напряженность E находим, учитывая, что в рассматриваемой задаче при указанном расположении координатных осей

$$E_y = 0; \quad E_z = 0.$$

Таким образом,

$$E = E_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\rho}{2\varepsilon}(d - 2x).$$

Задача 2

Даны два бесконечно длинных параллельных цилиндра кругового сечения, один вне другого (рис. 2.1).

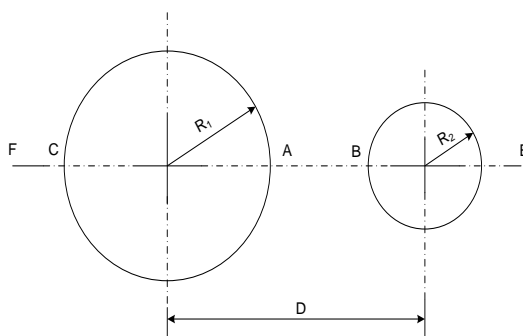


Рис. 2.1

Радиусы цилиндров R_1 и R_2 , расстояние между осями цилиндров D . Напряжение между цилиндрами $U = 6000В$. Большой цилиндр заряжен положительно, меньший – отрицательно.

Таблица 2.1

N ва риант а	Группы									
	1	2	1	2	3	4	5	6		
	D									
	м	м	см	см	см	см	см	см		
1			18	19	20	21	22	23		
2	8	3	18	19	20	21	22	23	4	5
3	8	3	18	19	20	21	22	23	5	4
4	8	3	18	19	20	21	22	23	4	8
5	8	3	18	19	20	21	22	23	5	8
6	7	2	18	19	20	21	22	23	5	6
7	7	2	18	19	20	21	22	23	6	4
8	7	2	18	19	20	21	22	23	4	6
9	7	2	18	19	20	21	22	23	6	6
10	7	2	18	19	20	21	22	23	5	6
11	6	2	17	18	19	20	21	22	3	4
12	6	2	17	18	19	20	21	22	4	8
13	6	2	17	18	19	20	21	22	5	4
14	6	2	17	18	19	20	21	22	4	6
15	6	2	17	18	19	20	21	22	5	8
16	6	2	17	18	19	20	21	22	3	8
17	6	2	17	18	19	20	21	22	6	4
18	6	2	17	18	19	20	21	22	4	6
19	6	2	17	18	19	20	21	22	6	6
20	6	2	17	18	19	20	21	22	5	6
21	6	1,5	16	17	18	19	20	21	3	4
22	6	1,5	16	17	18	19	20	21	4	8
23	6	1,5	16	17	18	19	20	21	5	4
24	6	1,5	16	17	18	19	20	21	4	6
25	6	1,5	16	17	18	19	20	21	5	8

Требуется:

1. Построить кривые распределения напряженности поля вдоль прямых АВ, СР, DE и кривые распределения потенциала вдоль этих же прямых.
2. Построить линии равного потенциала и силовые линии так, чтобы число интервалов между линиями равного потенциала было равно n , а число трубок потока - m .
3. Определить емкость цилиндров на 1 м длины. Исходные данные приведены в табл. 2.1

Указания

Последовательность расчета рассмотрим на примере. Пусть $U = 100В$, $D = 8 см$, $R_1 = 2 см$, $R_2 = 4 см$.

1. Определим расстояние от геометрических осей цилиндра до плоскости постоянного (нулевого) потенциала и расстояние от электрических осей до этой плоскости (рис.2.2).

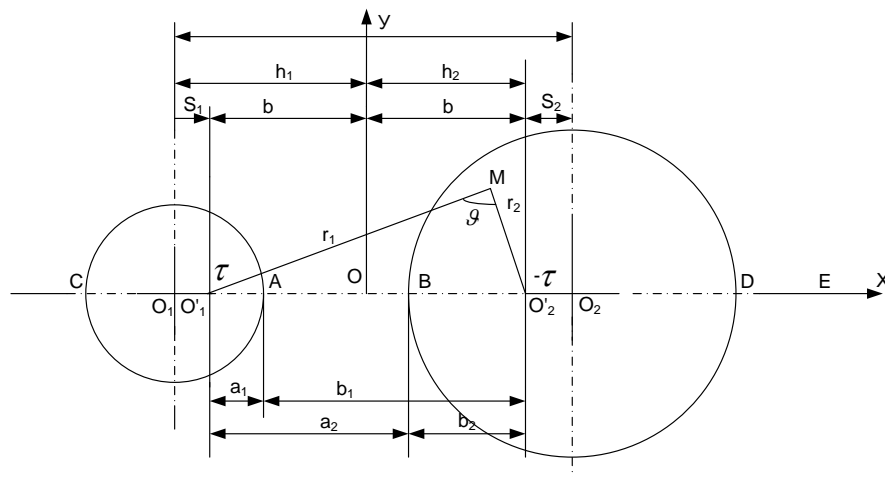
$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} = 3,25 см,$$

$$h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} = 4,75 см,$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 2,57 см.$$

Расстояние между электрическими и геометрическими осями цилиндров
 $S_1 = h_1 - b = 0,68 см$; $S_2 = h_2 - b = 2,18 см$.

2. Построим линии равного потенциала



Потенциал произвольной точки M определяется:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Линии равного потенциала являются окружностями. Радиус и абсцисса центра ν -ой эквипотенциальной окружности определяется:

$$R_{ov} = \frac{2K_v}{|1 - K_v|} b ;$$

$$X_{ov} = \frac{1 + K_v^2}{1 - K_v^2} b .$$

Определяем значения параметра K_{v_i} , соответствующие линиям равного потенциала. Всего линий равного потенциала $n + 1 = 5$

Для первой линии:

$$k_1 = \frac{r_{21}}{r_{11}} = \frac{b_1}{a_1} = 2,92 .$$

Для $n + 1$ линии:

$$k_5 = \frac{r_{25}}{r_{15}} = \frac{b_2}{a_2} = 0,546 .$$

Для того, чтобы при переходе от одной линии равного потенциала к другой, потенциал увеличивался на одну и ту же величину, необходимо, чтобы число k_v изменялось в геометрической прогрессии, а именно:

$$\frac{k_5}{k_4} = \frac{k_4}{k_3} = \frac{k_3}{k_2} = \frac{k_2}{k_1} = B .$$

Следовательно,

$$B = \sqrt[4]{\frac{K_5}{K_1}} = 0,658 .$$

Тогда числа \overline{K}_v будут равны:

$$k_2 = 1,94; k_3 = 1,26; k_4 = 0,831; k_5 = 0,546 .$$

Определяем радиусы и абсциссы центров эквипотенциальных окружностей:

$$R_{02} = \frac{2k_2}{|1 - k_2^2|} b = \frac{2 \cdot 1,94}{|1 - 1,94^2|} \cdot 2,57 = 2,62 \text{ см};$$

$$x_{02} = \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} b = \frac{1 + 1,94^2}{1 - 1,94^2} \cdot 2,57 = -4,44 \text{ см} .$$

Аналогично определяем:

$$R_{03} = 10,8 \text{ см}; x_{03} = -11,1 \text{ см}; R_{04} = 13,7 \text{ см}; x_{04} = 14,05 \text{ см} .$$

3. Построим линии напряженности электрического поля. Силовые линии являются дугами окружности [1]. Первой линией напряженности является линия, для которой угол $\nu = 0^\circ$. Следующие линии проводят через одно и тоже приращение угла $\Delta\nu$. Для данного примера

$$\Delta\nu = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} .$$

Координаты центров окружностей равны:

$$x'_{0v} = 0; y'_{0v} = b \operatorname{ctg} \nu_v.$$

Радиусы окружностей:

$$R'_{0v} = \frac{b}{|\sin \nu_v|}.$$

Картина поля нарисована на рис. 2.3.

Напряжение между цилиндрами (разность потенциалов):

$$U_{AB} = U_A - U_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}.$$

Определим расстояния a_1, b_1, a_2, b_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= R_1 - S_1 = 1,32 \text{ см}; & b_1 &= 2b - a_1 = 3,82 \text{ см}; \\ b_2 &= R_2 - S_2 = 1,82 \text{ см}; & a_2 &= 2b - b_2 = 3,32 \text{ см}; \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} = \frac{U_{AB}}{\ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}} = 60 \text{ В};$$

имеем

$$U = 60 \ln \left| \frac{b-x}{b+x} \right|.$$

По этому выражению рассчитываются значения потенциала и строится кривая распределения потенциала по оси x .

4. Построим эпюру распределения напряженности поля по оси x .

$$\vec{E} = \vec{i} \left(\frac{dU}{dx} \right) = i 60 \left(\frac{1}{b+x} \right) + \left(\frac{1}{b-x} \right)$$

По этому выражению рассчитываются значения модуля вектор напряженности электрического поля и строится кривая распределения напряженности по оси x .

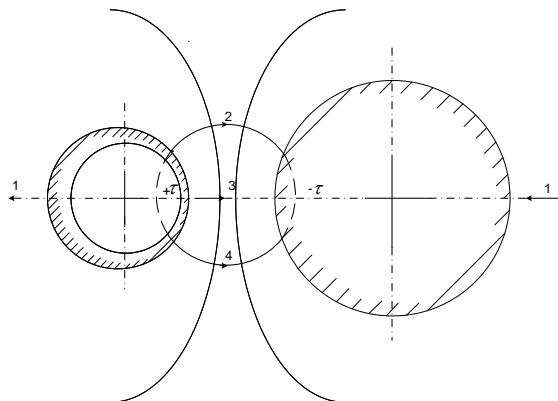


Рис.2.3

Задача 3

Линия передачи энергии постоянным током высокого напряжения питается от четырех последовательно соединенных одинаковых источников э.д.с. (рис.3.1). Напряжение каждого источника $U = 150\text{кВ}$. Данные линии: высота подвеса проводов h_1 и h_2 , расстояние между проекциями проводов D на поверхность земли, радиус проводов r_0 .

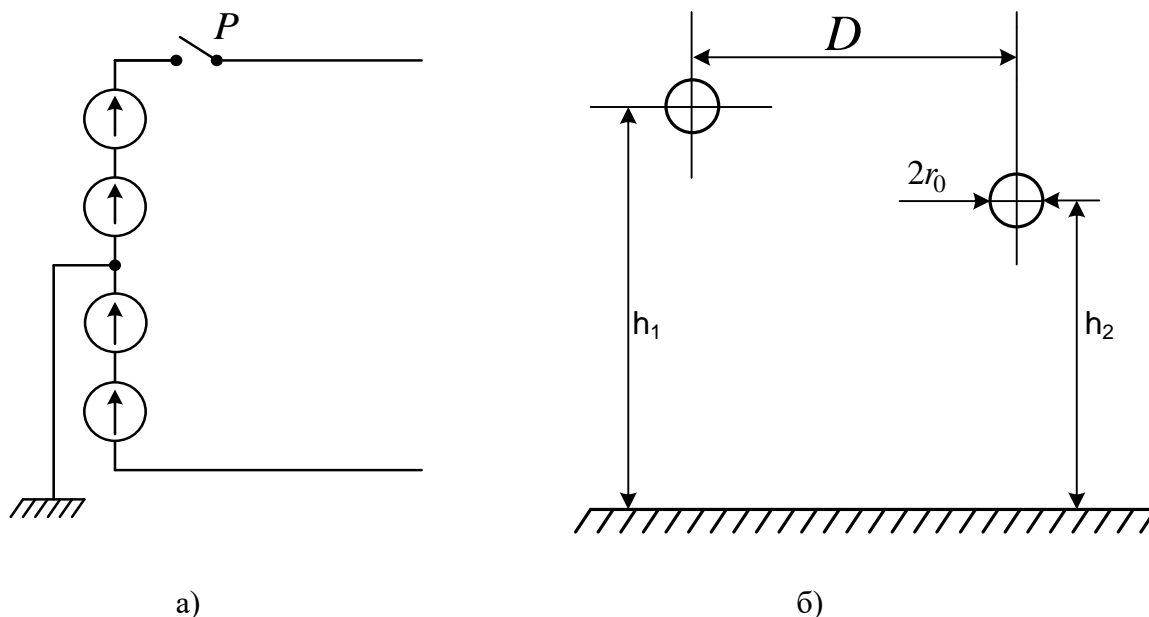


Рис. 3

Требуется:

1. Найти заряд каждого провода на 1 км длины.
2. Найти плотность σ индуцированного на поверхности земли заряда. Построить график зависимости σ от x , где x - расстояние от некоторой точки до проекции левого провода на поверхность земли.
3. Найти емкость двухпроводной линии на 1 км длины с учетом влияния земли и сравнить этот результат с данными расчета емкости, в котором влияние земли не учитывается.
4. В результате аварии один из источников энергии вышел из строя и его зажимы оказались замкнуты накоротко. Найти заряд каждого провода на 1 км длины и заряд q_0 на земле после аварии при отсутствии тока в линии.
5. Один провод отключен от источников (разъединитель P). Определить потенциал этого провода, если заряд на нем равен нулю.

Исходные данные приведены в табл. 3.1 и табл. 3.2

Таблица 3.1

Групповой вариант	1	2	3	4	5	6
r_0 , мм	6	8	10	11	12	14

Таблица 3.2

Индив. вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
h, м	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	4	5	6	7
D, м	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6

6*. Записать уравнения для линии равного потенциала и для силовой линии электрического поля. Построить картину электрического поля. Выполняется по указанию преподавателя.

Указания

Для определения зарядов можно воспользоваться системой уравнений с потенциальными коэффициентами

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2;$$

$$U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2,$$

где U_1 и U_2 - потенциалы проводов;

q_1 и q_2 - их заряды.

Потенциальные коэффициенты, зависят от геометрических параметров системы заряженных тел и диэлектрической проницаемости среды, собственные потенциальные коэффициенты проводов определяются по выражению:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_i}{r_0},$$

где i - номер провода.

Выражение для взаимных потенциальных коэффициентов для различных вариантов взаимного расположения проводов имеют вид:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{D^2 + (h_1 + h_2)^2}}{\sqrt{D^2 + (h_1 - h_2)^2}};$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{D^2 + 4h^2}}{D}; \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{h_1 + h_2}{|h_1 - h_2|}.$$

Студенту предоставляется возможность выбрать то значение потенциального коэффициента, которое соответствует его варианту. Если задано напряжение между проводами и найдена емкость, то не трудно найти заряд на каждом проводе. Зная эти заряды и потенциальные коэффициенты можно найти потенциал каждого провода.

Потенциал незаряженного провода определяют по взаимному потенциальному коэффициенту и заряду соседнего провода. Последний в свою очередь определяется по потенциалу провода и собственному потенциальному коэффициенту. Обратить внимание, на то, что незаряженный провод может иметь значительный потенциал.

Для определения распределения плотности σ , индуцированного на поверхности земли заряда можно воспользоваться методом зеркальных изображений и затем методом наложения. Расчет поля в данной задаче упрощается благодаря тому, что радиусы проводов r_0 значительно меньше высоты подвеса h . Поэтому провод и его зеркальное изображение в плоскости земли можно считать бесконечно тонким.

Поверхностная плотность заряда на земле

$$\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_n,$$

где D_n и E_n - нормальная составляющая вектора смещения и вектора напряженности электрического поля в диэлектрике у поверхности земли.

2. Электростатическое поле постоянного тока

Задача 4

В кабелях применяют многослойную изоляцию, это позволяет снижать максимальное значение напряженности электрического поля и оказывает влияние на величину тока утечки. Оценку этих эффектов удобно рассмотреть на простейшем случае коаксиального кабеля.

Дан коаксиальный кабель с двухслойной изоляцией (рис. 4.1), имеющий длину в осевом направлении $l = 20$ м.

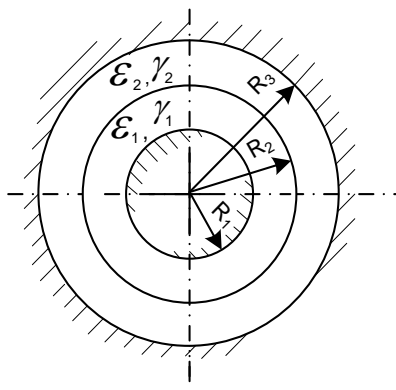


Рис.4.1

Радиус жилы R_1 , радиус оболочки R_3 . Радиус граничной поверхности между слоями R_2 . Диэлектрическая проницаемость внутреннего и внешнего слоев соответственно равны ε_1 и ε_2 .

Удельная проводимость указанных слоев соответственно равна $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ См/м, $\gamma_2 = 3 \cdot 10^{-9}$ См/м. Оболочка заземлена, напряжение между жилой и оболочкой 6000 В (постоянное).

Требуется:

1. Найти емкость и проводимость утечки кабеля.
2. Рассчитать и построить кривые распределения:

- плотность тока утечки;
- напряженность электрического тока;
- электрического смещения;
- потенциала.

3. Найти поверхностную плотность свободного и связанного зарядов на поверхности раздела сред.

Исходные данные приведены в табл. 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

N группового варианта	Параметры		
	R ₁	R ₂	R ₃
	см	см	см
1	1	1,5	2
2	1,5	2	2,5
3	2	2,5	3
4	2,5	3	3,5
5	3	3,5	4
6	4	4,5	5

Таблица 4.2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ε _{r1}	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
ε _{r2}	1	1,5	2	2,5	3	3,5	1	1,5	2	2,5	1	1,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	1	1,5	2	3	4	5

Указания

В однородных неидеальных диэлектриках в стационарном поле даже при незначительных удельной проводимости возникают токи утечки $I = gU$, где g - проводимость утечки изоляции кабеля диэлектриках. Плотность тока проводимости $J(r)$ в данной задаче является функцией радиуса.

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r l}.$$

На границе раздела сред выполняются условия:

напряженность электрического поля определяется по закону Ома в дифференциальной форме:

$$E(r) = \frac{J(r)}{\gamma}. \quad (1)$$

нормальные составляющие вектора плотности тока на поверхности

раздела двух сред непрерывны: $J_{n_1} = J_{n_2}$; (2)

тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$

Вектора смещения \vec{D} , вектор напряженности электрического поля \vec{E} и поляризованности связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3)$$

С учетом (1) – (3) получаем граничное условие для нормальных составляющих вектора электронного смещения

$$\frac{D_{n_1}}{D_{n_2}} = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2}{\varepsilon_2 \gamma_1}$$

Поверхностные плотности зарядов на поверхности раздела сред равны: свободного заряда σ :

$$\sigma = D_{n_1} - D_{n_2} \quad \text{или} \quad \sigma = \varepsilon_0 J_m \left(\frac{\varepsilon_{r_1}}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_{r_2}}{\gamma_2} \right);$$

связанного заряда $\sigma_{св}$:

$$\sigma_{св} = P_{n_1} - P_{n_2} \quad \text{или} \quad \sigma_{св} = \varepsilon_0 J_m \left(\frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\gamma_1} \right).$$

Задача 5

Дан заземлитель шаровой формы или часть шара, который располагается в однородной почве, с заданной удельной проводимостью (рис. 5.1 ÷ 5.10), к которому подводится ток.

В задачах рис. 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.9, заземлители расположены вблизи вертикального обрыва.

Параметры заземлителя для каждого варианта даны в табл. 5.1.

Номер схемы должен соответствовать последней цифре индивидуального варианта.

Требуется:

1. Определить сопротивление заземления (сопротивление растекания тока).

2. Определить шаговое напряжение между точками «А» «В» (шаг считать равным 0,75 м).

3. Определить распределение потенциала по поверхности земли.

Расчеты выполнить с учетом влияния границ проводящей среды (почвы).

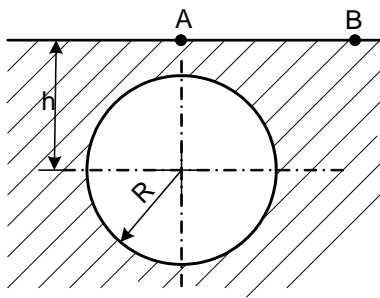


Рис.5.1 и 5.6

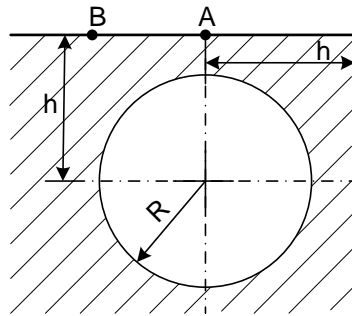


Рис.5.2 и 5.7

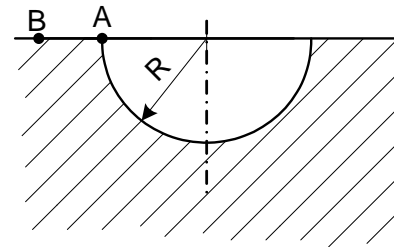


Рис.5.3 , 5.8 и 5.10

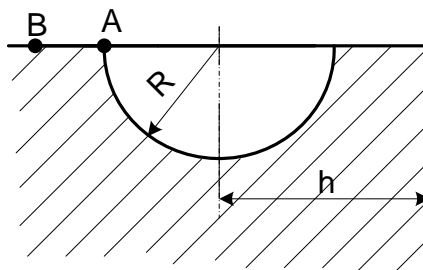


Рис.5.4, 5.5 и 5.9

Указания

При решении рекомендуется решать задачу методом электростатической аналогии.

При решении электростатической задачи нужно использовать метод зеркальных отображений, считать при этом что $h \gg R$.

Исходные данные в табл. 5.1

Таблица 5.1

N варианта	N схемы	Группы						γ	R	h
		1	2	3	4	5	6			
		I								
		A	A	A	A	A	A	$\times 10^{-3} \frac{C_{M}}{CM}$	CM	M
1	1	100	105	110	115	120	125	0,32	10	3
2	2	90	95	100	105	110	115	9,57	11	3
3	3	80	85	90	95	100	105	5,3	12	6
4	4	70	75	80	85	90	95	3,83	13	6
5	1	60	65	70	75	80	85	14,1	14	5
6	2	50	55	60	65	70	75	5,3	15	5
7	3	40	45	50	55	60	65	1,61	16	2
8	4	30	35	40	45	50	55	4,96	17	2
9	1	20	25	30	35	40	45	3,11	18	4
10	2	10	15	20	25	30	35	14,1	19	4
11	3	100	105	10	15	20	25	0,32	20	5

12	4	90	95	110	115	10	15	9,57	10	5
13	1	80	85	100	105	120	125	5,3	11	3
14	2	70	75	90	95	110	115	3,83	12	3
15	3	60	65	80	85	100	105	14,1	13	4
16	4	50	55	70	75	90	95	5,3	14	4
17	1	40	45	60	65	80	85	3,83	15	2
18	2	30	35	50	55	70	75	14,1	16	2
19	3	20	25	40	45	60	65	5,3	17	2,5
20	4	10	15	30	35	50	55	1,61	18	2,1
21	1	100	105	20	25	40	45	4,96	19	5
22	2	90	95	10	15	30	35	3,41	20	5
23	3	80	85	110	115	20	25	14,1	10	4,5
24	4	70	75	100	105	10	15	3,63	11	4,5
25	1	60	65	90	95	120	125	0,32	12	2

Задача 6

Два параллельных провода радиуса R упали на землю на расстояние друг от друга, равным B , на длине $l = 100$ м. Между ними протекает ток короткого замыкания I .

Требуется:

1. Определить шаговое напряжение, под которым окажется человек, подходящий к проводам, в момент когда он находится от них на расстоянии a , при длине шага 0,85 м и удельной проводимости земли $\gamma = 10^{-2}$ См/м.
2. Построить эквипотенциальные поверхности поля тока в земле, определить потенциалы проводов.

Параметры для каждого варианта даны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

N варианта	Группы						B	R	a
	1	2	3	4	5	6			
	I								
	кА	кА	кА	кА	кА	кА			
1	6	7	8	9	10	11	1	4	1
2	7	8	9	10	11	12	2	4	1
3	8	9	10	11	12	13	3	4	1
4	9	10	11	12	13	14	4	4	1
5	10	11	12	13	14	15	5	6	1,5
6	11	12	13	14	15	16	1	6	10
7	12	13	14	15	16	17	2	6	10
8	13	14	15	16	17	18	3	6	10
9	14	15	16	17	18	19	4	2	5
10	15	16	17	18	19	20	5	2	5
11	16	17	18	19	20	21	1	2	5
12	17	18	19	20	21	22	2	2	5
13	18	19	20	21	22	23	3	2,5	7
14	19	20	21	22	23	24	4	2,5	7

15	20	21	22	23	24	25	5	2,5	7
16	21	22	23	24	25	26	1	2,5	7
17	22	23	24	25	26	27	2	3	8
18	23	24	25	26	27	28	3	3	8
19	24	25	26	27	28	29	4	3	8
20	25	26	27	28	29	30	5	3	8
21	26	27	28	29	30	31	1	3	8
22	27	28	29	30	31	32	2	3,5	9
23	28	29	30	31	32	33	3	3,5	9
24	29	30	31	32	33	34	4	3,5	9
25	30	31	32	33	34	35	5	3,5	9

Указания

1. Считать, что провода погрузились в землю на глубину равную радиусу провода R .
2. Задачу решать методом электростатической аналогии.
3. При решении аналогичной электростатической задачи использовать метод зеркальных отображений. При этом влиянием проводов друг на друга пренебречь, так как $R \ll B$.
4. Число интервалов между линиями равного потенциала n выбрать четным и достаточным большим, например $n = 18$.

Задача 7

Под дном водоема рис. 7.1 проложена труба, в нутрии которой помещается высоковольтный кабель. При замыкании тока ведущих частей на оболочку кабеля в аварийном режиме с трубы стекает в окружающую среду ток I на длине $l \gg n$. Считая $H \gg h$. Найти выражение для потенциала и построить картину поля в воде и в грунте.

Определить границу опасной для водолазов зоны, в нутрии которой при аварии $E > 10$ В/см. Принять $L = 1000$ м, $d = 20$ см.

Исходные данные приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1

N варианта	Группы						h	γ_1	γ_2
	1	2	3	4	5	6			
	I						м	$\times 10^{-4} \frac{Cm}{m}$	$\times 10^{-4} \frac{Cm}{m}$
кА	кА	кА	кА	кА	кА				
1	7	8	9	10	11	12	0,5	1	0,5
2	8	9	10	11	12	13	0,6	1,5	0,75
3	9	10	11	12	13	14	0,7	2	1
4	10	11	12	13	14	15	0,8	2,5	1,5

5	11	12	13	14	15	16	0,9	3	2
6	12	13	14	15	16	17	1	3,5	0,5
7	13	14	15	16	17	18	1,1	4	0,75
8	14	15	16	17	18	19	1,2	4,5	1
9	15	16	17	18	19	20	1,3	5,5	1,5
10	16	17	18	19	20	21	1,4	6	2
11	17	18	19	20	21	22	1,5	1	0,5
12	18	19	20	21	22	23	0,5	1,5	0,75
13	19	20	21	22	23	24	0,6	2	1
14	20	21	22	23	24	25	0,7	2,5	1,5
15	21	22	23	24	25	26	0,8	3	2
16	22	23	24	25	26	27	0,9	3,5	0,5
17	23	24	25	26	27	28	1	4	0,75
18	24	25	26	27	28	29	1,1	4,5	1
19	25	26	27	28	29	30	1,2	5,5	1,5
20	26	27	28	29	30	31	1,3	6	2
21	27	28	29	30	31	32	1,4	1	0,5
22	28	29	30	31	32	33	1,5	1,5	0,75
23	29	30	31	32	33	34	0,5	2	1
24	30	31	32	33	34	35	0,6	2,5	1,5
25	31	32	33	34	35	36	0,7	3	2

Требуется:

1. Определить границу опасной для водолазов зоны, внутри которой при аварии $E > 10 \frac{B}{см}$.
2. Найти выражение для потенциала и построить картину поля в воде и грунте.

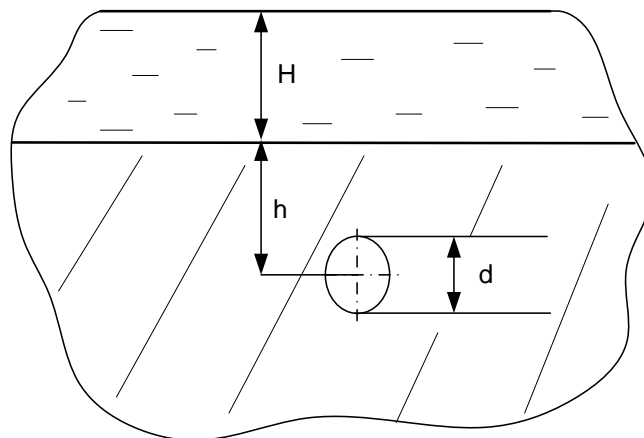


Рис.7.1

Указания

1. Пренебречь влиянием поверхности воды на картину поля. Считать $H = \infty$.
2. Задачу решать методом электростатической аналогии.
3. При решении аналогичной электростатической задачи использовать метод зеркальных отображений. При этом влиянии проводов друг на друга пренебречь.
4. Картину поля в грунте можно построить графическим методом или с помощью пакета программ Mathcad.

3. Магнитное поле постоянного тока.

Задача 8

По цилиндрическому медному проводу протекает постоянный ток I . В плоскости, проходящей через ось провода, расположена тонкая катушка с числом витков $w = 20$ (рис. 8.1). Параметры системы приведены в табл. 8.1.

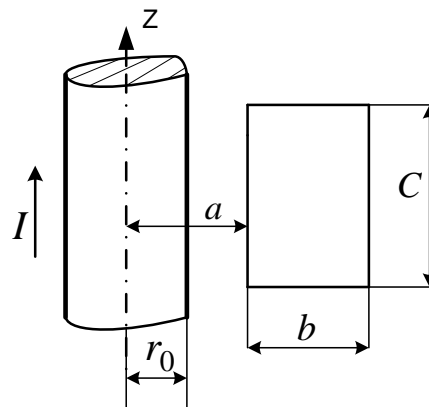


Рис.8.1

Таблица 8.1.

N варианта	Группы						a	b
	1	2	3	4	5	6		
	R ₀							
	см	см	см	см	см	см		
1	6	7	8	9	10	11	6	5
2	7	8	9	10	11	12	6	5
3	8	9	10	11	12	13	6	5
4	9	10	11	12	13	14	6	5
5	10	11	12	13	14	15	6	5
6	11	12	13	14	15	16	6	5
7	12	13	14	15	16	17	6	5
8	13	14	15	16	17	18	8	6

9	14	15	16	17	18	19	8	6
10	15	16	17	18	19	20	8	6
11	16	17	18	19	20	21	8	6
12	17	18	19	20	21	22	8	6
13	18	19	20	21	22	23	8	6
14	6	7	8	9	10	11	10	7
15	7	8	9	10	11	12	10	7
16	8	9	10	11	12	13	10	7
17	9	10	11	12	13	14	10	7
18	10	11	12	13	14	15	10	7
19	11	12	13	14	15	16	10	7
20	12	13	14	15	16	17	10	7
21	13	14	15	16	17	18	12	8
22	14	15	16	17	18	19	12	8
23	15	16	17	18	19	20	12	8
24	16	17	18	19	20	21	12	8
25	17	18	19	20	21	22	12	8

Требуется:

1. Определить зависимость потенциала векторного магнитного потенциала \vec{A} в функции радиуса от оси цилиндра, построить график $A(r)$.
2. Вычислить магнитный поток, замыкающейся в самом проводе на 1 м его длины, определить внутреннюю индуктивность;
3. Найти выражение взаимной индуктивности между проводами и рамкой. Вычислить M для заданных параметров;
4. Найти э.д.с. $e(t)$, индуктируемую в проводе током $i = 10 \sin(314 + 30^\circ)$ А, в рамке протекает ток.
5. Построить картину магнитного поля, изобразив трубки магнитной индукции и линии равного скалярного магнитного потенциала. Потоки всех магнитных трубок ($\Delta\Phi$) как внутри, так и вне провода должны быть одинаковыми. Разности магнитных потенциалов между каждой парой соседних линий равного потенциала должны быть одинаковыми.

Указания

Для определения векторного магнитного потенциала необходимо решить уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{\delta},$$

при граничных условиях на поверхности раздела сред:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \text{ и } H_{\tau_1} = H_{\tau_2}.$$

Расположим оси цилиндрической системы координат так, чтобы ось z совпала с осью цилиндра. Так как вектор плотности тока имеет только одну проекцию, то и векторной потенциал будет иметь только одну проекцию на ось z .

Учитывая, что поле обладает круговой симметрией $A = f(r)$, для векторного потенциала имеем уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_0 \delta, & \text{при } 0 \leq r \leq r_0 \quad (\text{первая область}) \\ 0, & \text{при } r_0 \leq r < \infty \quad (\text{вторая область}) \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta = \frac{I}{\pi r_0^2}$.

Граничные условия для данной задачи будут такими:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_0 \quad A_1(r_0) &= A_2(r_0), \\ B_1(r_0) &= B_2(r_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Решив краевую задачу (1), (2) получается выражение для векторного потенциала (вывод студентам нужно сделать самостоятельно).

$$\begin{aligned} A_1(r) &= -\vec{1}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} r^2 & \text{при } 0 \leq r \leq r_0; \\ A_2(r) &= -\vec{1}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right) & \text{при } r_0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Магнитный поток через поверхность ограниченную контуром, l определяется

$$\Phi = \oint_l \vec{A} d\vec{l} \quad (4)$$

Построение картины поля. Число трубок индукции внутри провода рекомендуется выбрать $m = 4$, Тогда поток в одной трубке равен

$$\Delta \Phi = \frac{\Phi_i}{m}, \quad (5)$$

где Φ_i - магнитный поток, замыкающий внутри провода

Используя (3)-(5), получаем рекуррентное соотношение для радиусов линии индукции, разделяющих магнитное поле на трубки равного магнитного потока внутри провода

$$r_{v+1}^2 = r_v^2 + N$$

Радиус окружность, ограничивающей последнюю внутреннюю трубку должен получиться равным r_0 .

Аналогично, для радиусов ограничивающих трубки внешнего магнитного потока, получаем рекуррентное соотношение

$$r'_{v+1} = r_v \cdot M$$

где M - показатель геометрической прогрессии в соответствии с которой меняются радиусы.

Радиус окружности r_1' ограничивающей первую внешнюю трубку, будет равен:

$$r_1' = r_0 \cdot M.$$

4. Переменное электромагнитное поле

Расчет электромагнитного поля рекомендуется проводить по следующей алгоритмической схеме:

1. Строится расчетная модель электромагнитной системы с учетом сформулированных в задании допущений.

2. Анализируется структура электромагнитного поля и выбирается система координат, в которой будет производиться решения.

3. Записываются уравнения электромагнитного поля. Выбирается величина, относительно которой будет искомое решение задачи, записывается дифференциальное уравнение в частных производных выбранной величины.

4. Находится общее решение однородного дифференциального уравнения, которое содержит ряд постоянных интегрирования.

5. Определяются постоянные интегрирования из требования удовлетворения граничным условиям задачи.

6. Записываются решения для искомых величин.

7. Определяются требуемые параметры, величины, строятся графики функций.

Задача 9

Расчет электромагнитного поля и параметров цилиндрического проводника.

По цилиндрической шине (рис. 9.1) пропускается ток $I = 500 \text{ А}$.

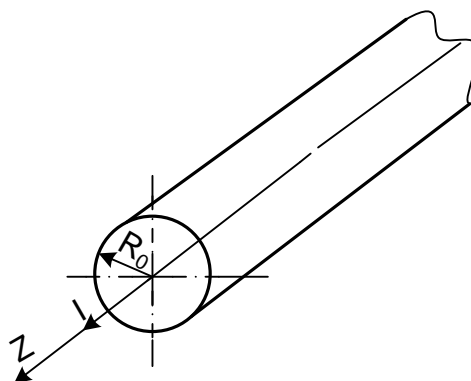


Рис.9.1. Эскиз шины

Требуется:

1. Рассчитать электромагнитное поле, т.е. определить выражение для E_m, H_m, δ_m ;
2. Построить кривые распределения напряженности электрического поля в шине для момента времени $t = 0$;
3. Построить кривые значения напряженности электрического и магнитного поля и вектора Пойнтинга на поверхности проводника в зависимости от времени за половину периода;
4. Определить потери мощности, а также величины активного сопротивления и индуктивного сопротивления, обусловленного внутренней индуктивностью, на единицу длины шины;
5. Определить отношение активного сопротивления к сопротивлению провода на постоянном токе;
6. Определить отношение внутренней индуктивности при переменном токе к ее значению на постоянном токе.

Исходные данные приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

N варианта	Группы						R_0	ψ_i	γ	μ/μ_0
	1	2	3	4	5	6				
	f									
	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц				
1	150	170	180	100	150	200	2	0	$7 \cdot 10^7$	1
2	170	180	100	150	200	250	2	$\pi/2$	$7 \cdot 10^7$	1
3	180	100	150	200	250	300	2	$\pi/3$	$7 \cdot 10^7$	1
4	100	150	200	250	300	400	2	$\pi/4$	$7 \cdot 10^7$	1
5	150	200	250	300	400	500	2	$\pi/6$	$7 \cdot 10^7$	1
6	200	250	300	400	500	120	2	0	$5 \cdot 10^7$	1
7	250	300	400	500	120	150	2	$\pi/2$	$2 \cdot 10^7$	1
8	300	400	500	120	150	170	2,5	$\pi/3$	$1 \cdot 10^7$	1
9	400	500	120	150	170	180	2,5	$\pi/4$	$5 \cdot 10^6$	1
10	500	120	150	170	180	100	2,5	$\pi/6$	$5 \cdot 10^6$	10
11	120	150	170	180	100	150	2,5	0	$5 \cdot 10^6$	10
12	150	170	180	100	150	200	2,5	$\pi/2$	$5 \cdot 10^6$	10
13	170	180	100	150	200	250	2,5	$\pi/3$	$5 \cdot 10^6$	10
14	180	100	150	200	250	300	2,5	$\pi/4$	$5 \cdot 10^6$	10
15	100	150	200	250	300	400	3	$\pi/6$	$5 \cdot 10^6$	10
16	150	200	250	300	400	500	3	0	$5 \cdot 10^6$	10
17	200	250	300	400	500	120	3	$\pi/2$	$5 \cdot 10^6$	20
18	250	300	400	500	120	150	3	$\pi/3$	$4 \cdot 10^6$	20
19	300	400	500	120	150	170	3	$\pi/4$	$4 \cdot 10^6$	20
20	400	500	120	150	170	180	3	$\pi/6$	$4 \cdot 10^6$	20

21	500	120	150	170	180	100	3	0	$4 \cdot 10^6$	20
22	120	150	170	180	100	150	3,5	$\pi/2$	$4 \cdot 10^6$	20
23	150	170	170	100	150	200	3,5	$\pi/3$	$4 \cdot 10^6$	20
24	170	180	300	150	200	250	3,5	$\pi/4$	$4 \cdot 10^6$	20
25	180	300	150	200	250	270	3,5	$\pi/6$	$2 \cdot 10^6$	20

Указания

Расчет произвести при следующих допущениях:

1. Проводник выполнен из линейного, однородного и изотропного материала;
2. Система имеет бесконечную протяженность, т.е. краевой эффект отсутствует;
3. Токи электрического смещения пренебрежимо малы, свободные заряды отсутствуют;
4. Комплексная амплитуда тока одинакова вдоль провода;
5. Отсутствует эффект близости.

Пример.

Параметры электромагнитной системы : $R_0 = 1,5$ см; $I = 670$ А; $\psi_i = 0$;

$$f = 500 \text{ Гц}; \gamma = 0,48 \cdot 10^8 \frac{\text{См}}{\text{м}}; \mu = \mu_0.$$

С учетом указанных в задании допущениях строится расчетная модель электромагнитной системы (рис.9.2)

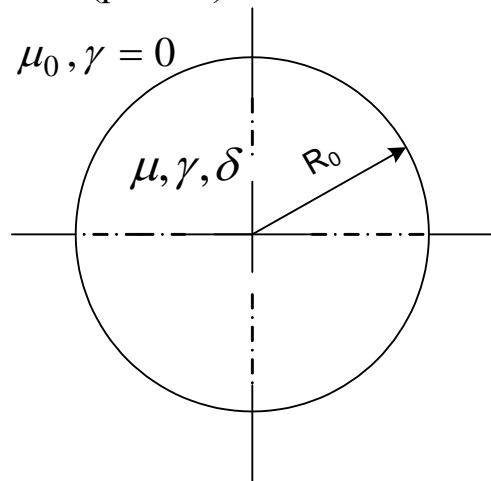


Рис.9.2.

Решение приведем в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью проводника и имеет направление, совпадающее с направлением тока в рассматриваемый момент времени. В такой системе координат с учетом принятых выше допущений электромагнитное поле в проводнике имеет только осевую составляющую напряженности

электрического поля, направленную вдоль линии тока и только угловую составляющую напряженности магнитного поля, поверхностное значение которой на поверхности проводника, благодаря осевой симметрии системы можно рассчитать на основании закона полного тока.

$$\dot{H}_{m_1} = \sqrt{2I(2\pi R_0)}. \quad (9.1)$$

Запишем уравнение Максвелла для проводящей среды в комплексной форме

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{\delta}}, \quad (9.2)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}_m = -j\omega \dot{\vec{B}}_m \quad (9.3)$$

совместно с остальными уравнениями электродинамики:

$$\text{div} \dot{\vec{B}}_m = 0 (\text{div} \dot{\vec{H}}_m = 0), \quad (9.4)$$

$$\dot{\vec{\delta}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m; \quad (9.5)$$

$$\text{div} \dot{\vec{\delta}}_m = 0 (\text{div} \dot{\vec{E}}_m = 0). \quad (9.6)$$

Будем для решения использовать понятие векторного магнитного потенциала \vec{A} , который вводится соотношениями

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{B}, \quad \text{div} \vec{A} = 0,$$

тогда система уравнений поля (9.2)-(9.6) сводится к уравнению для комплекса амплитуды векторного магнитного потенциала.

Перепишем (9.2) и (9.3) соответственно в виде

$$\text{rot rot} \dot{\vec{A}}_m = \mu \gamma \dot{\vec{E}}_m \quad (*)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \text{rot} \dot{\vec{A}}_m. \quad (**)$$

Из (**) следует $\dot{\vec{E}}_m = -j\omega \dot{\vec{A}}_m$.

Учитывая векторное тождество $\text{rot rot} \dot{\vec{A}}_m = \text{grad div} \dot{\vec{A}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{A}}_m$

и что $\dot{\vec{A}}_m = 0$, из (*) получаем

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + q^2 \dot{\vec{A}}_m = 0 \quad (9.7)$$

где $q = \sqrt{-j\omega\mu\gamma} = \sqrt{-jK}$.

Вектор имеет только одну составляющую, т.е. $A = A_z$. Поэтому (9.7) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \dot{A}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{A}_m}{dr} + q^2 \dot{A}_m = 0 \quad (9.8)$$

Введя параметр $p = qr$ получим уравнение Бесселя с комплексным аргументом p .

$$\frac{d^2 \dot{A}_m}{d^2 p} + \frac{1}{p} \frac{d\dot{A}_m}{dp} + \dot{A}_m = 0. \quad (9.9)$$

Общее решение (9.9) можно записать в виде

$$\dot{A}_m = C_1 J_0(qr) + C_2 N_0(qr), \quad (9.10)$$

где $J_0(qr)$, $N_0(qr)$ - функция Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго рода.

Так как аргумент функции Бесселя обобщается в нуль на оси провода и $N_0(qr) = \infty$, то функции Бесселя второго рода должна быть из решения исключена, т.е. постоянная $C_2 = 0$. Тогда

$$\dot{A}_m = C_1 J_0(qr) = C J_0(qr). \quad (9.11)$$

Напряженность магнитного поля определим с учетом правила дифференцирования функций Бесселя (см. приложения 2)

$$\dot{H}_m = -\frac{1}{\mu} \frac{d\dot{A}_m}{dr},$$

$$\dot{H}_m = C \frac{q}{\mu} J_1(qr). \quad (9.12)$$

Определим постоянную интегрирования.

При $r = R_1$ $\dot{H}_{m1} = \frac{\dot{I}_m}{2\pi R_1} = C \frac{q}{r} J_1(qR_0),$

откуда $C = \frac{\mu \dot{I}_m}{2\pi R_1 q J_1(qR_0)}.$

Подставляя выражение для C в (9.12), находим

$$\dot{H}_m = \frac{\mu q \dot{I}_m}{2\pi R_1 q J_1(qR_0) \mu} J_1(qr) = \frac{\dot{I}_m}{2\pi R_1} \frac{J_1(qr)}{J_1(qR_0)}. \quad (9.13)$$

Напряженность электрического поля:

$$\dot{E}_m = -j\omega \dot{A}_m = -j\omega \frac{\mu \dot{I}_m J_0(qr)}{2\pi R_1 q J_1(qR_0)} = \frac{q \dot{I}_m}{2\pi R_1} \frac{J_0(qr)}{J_1(qR_0)} \quad (9.14)$$

Комплекс амплитуды плотности тока:

$$\dot{\delta}_m = \gamma \dot{E}_m = \frac{q \dot{I}_m J_0(qr)}{2\pi R_1 J_1(qR_0)}$$

Подставляя числовые данные и учитывая, что

$$q = \sqrt{-j2\pi \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10^8} = 437 e^{-45^\circ}, \text{ м}^{-1} \quad (9.15)$$

и $J_1(qR_0) = J_1(\sqrt{-j6,55}) = 15,4 e^{j155^\circ}$, получим

$$\dot{E}_m = 6 \cdot 10^{-3} e^{-j200^\circ} J_0(\sqrt{-jkr}), \quad \frac{B}{m} \quad (9.16)$$

$$\dot{H}_m = 655 e^{-j155^\circ} J_1(\sqrt{-jkr}), \quad \frac{A}{m} \quad (9.17)$$

$$\dot{\delta}_m = 2691 \cdot 10^5 e^{-j200^\circ} J_0(\sqrt{-jkr}), \quad \frac{A}{m^2}. \quad (9.18)$$

По получаемым выражениям (9.16) - (9.18) рассчитываются $\dot{E}_m, \dot{H}_m, \dot{\delta}_m$ в зависимости от значений радиуса r с помощью таблице функций Бесселя (см. приложение 1). Результаты сводятся в табл. 9.2. На основании полученных данных строятся кривые зависимости E, H , и δ от r для рассматриваемого момента времени (рис. 9.3).

Таблица 9.2

r	kr	E_m	ψ_E	H_m	ψ_H	δ_m	ψ_δ
М	-	В/м	рад	А/м	рад	А/м	рад
0	0	$5,7 \cdot 10^{-3}$	-3,49	0	3,489	$28,7 \cdot 10^4$	-3,48
0,00232	1	$5,97 \cdot 10^{-3}$	-3,24	328	3,36	$29,0 \cdot 10^4$	-3,24
0,0046	2	$7,23 \cdot 10^{-3}$	-2,58	683	3,02	$35,1 \cdot 10^4$	-2,58
0,0068	3	$11,5 \cdot 10^{-3}$	-1,81	1180	2,44	$50,0 \cdot 10^4$	-4,81
0,0091	4	$20,3 \cdot 10^{-3}$	-1,08	2080	1,73	$98,5 \cdot 10^4$	-1,08
0,0114	5	$36,9 \cdot 10^{-3}$	-0,39	3810	0,9	$179,0 \cdot 10^4$	-0,39
0,0137	6	$68,2 \cdot 10^{-3}$	0,33	100	0,38	$331,0 \cdot 10^4$	0,33
0,015	6,55	$96 \cdot 10^{-3}$	0,71	10000	0	$467,0 \cdot 10^4$	0,71

Записываются выражения мгновенных величин на поверхности проводника

$$E(t) = 96 \cdot 10^{-3} \sin(3140t + 0,71),$$

$$H(t) = 10^5 \sin 3140t,$$

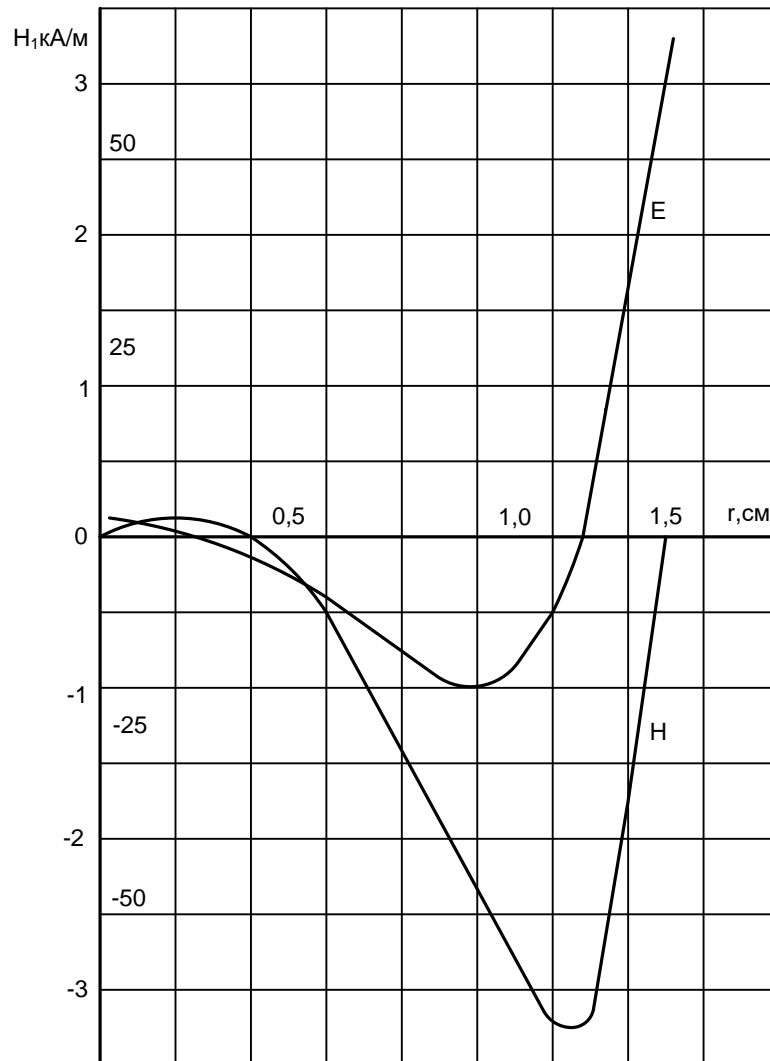


Рис. 9.3. Кривые значений $E(r)$ и $H(r)$ в момент времени $t = 0$

$$S = E_{m_1} H_{m_1} \sin(\omega t + 0,71) \sin \omega = 364 - 480 \cos(6280t + 0,71)$$

Строятся эти зависимости на половину периода (рис.9.4).
 Определяем модуль вектор Пойнтинга на поверхность провода .

$$S_1 = \dot{E}_1 H_1^* = 480 e^{j0,71} \frac{BA}{M^2}$$

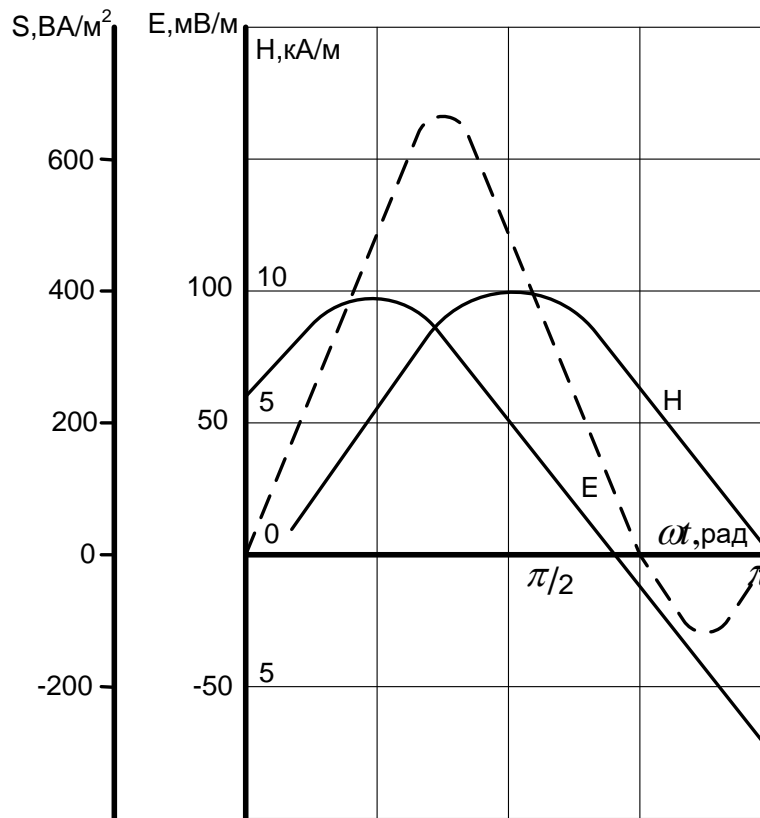


Рис.9.4. Кривые изменения величин в зависимости от времени на поверхности проводника.

Используя теорему Умова-Пойнтинга, определяем: потери мощности на 1м длины проводника

$$P = \operatorname{Re}(S_1) 2\pi R_1 \cdot 1 = \operatorname{Re}(480e^{j0,71}) 2\pi \cdot 0,015 = 35 \text{ Вт.}$$

величины активного сопротивления и индуктивного сопротивления, обусловленного внутренней индуктивностью проводника определяются:

$$r + j\omega L_1 = \frac{S 2\pi R_1 \cdot 1}{I^2} = \frac{480e^{j0,71} \cdot 2\pi \cdot 0,15}{670^2} = 7,8 + j6,6 \cdot 10^{-5} \text{ Ом};$$

$$r = 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}, \quad x_L = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}.$$

Задача 10

Расчет электромагнитного поля и параметров шины, расположенной в пазу электрической машины.

По шине, находящейся в прямоугольном пазу электрической машины (рис.10.1), протекает ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Высота шины h , ширина b , проводимость γ , магнитная проницаемость μ_0 , частота $f = 50$ Гц.

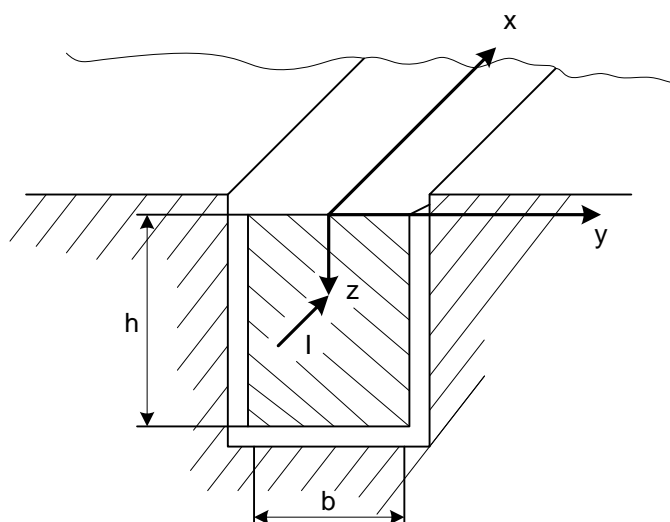


Рис. 10.4. Эскиз электромагнитной системы

Для заданного варианта шины требуется:

1. рассчитать электромагнитное поле: получить выражение для составляющих напряженности магнитного поля и плотности тока в шине;
2. построить кривые распределения напряженности магнитного поля и плотности тока в шине в зависимости от координат z для момента времени $t = 0$;
3. построить кривые распределения амплитудных значений напряженности магнитного поля и плотности тока в шине в зависимости от координаты z ;
4. определить активное и внутреннее сопротивление шины на 1 м длины;
5. мощность, теряемую в шине на 1 м длины.

Параметры электромагнитной системы для заданного варианта приведены в таблице 10.1

Указания

Расчет произвести при следующих допущениях:

1. Шина выполнена из однородного, линейного изотропного материала;
2. Система имеет бесконечные размеры по оси x , т.е. краевой эффект отсутствует;
3. Магнитная проницаемость материала, в котором сделан паз, стремится к бесконечности;
4. Толщина изоляции между шиной и плазом мало и можно считать, что ширина плаза практически равна ширине шины.

Таблица 1.2

N варианта	Группы						b	h	γ	ψ_i
	1	2	3	4	5	6				
	I_m						см	см	$\frac{C_m}{m}$	рад
	A	A	A	A	A	A				
1	200	300	400	500	600	700	1	4	$7 \cdot 10^7$	π
2	300	400	500	600	700	800	1	4	$7 \cdot 10^7$	0
3	400	500	600	700	800	900	1	4	$7 \cdot 10^7$	$\pi/2$
4	500	600	700	800	900	1000	1	4	$7 \cdot 10^7$	0
5	600	700	800	900	1000	100	1	4	$7 \cdot 10^7$	$\pi/4$
6	700	800	900	1000	100	200	1	4	$5 \cdot 10^7$	$-\pi/4$
7	800	900	1000	100	200	300	1	4	$2 \cdot 10^7$	π
8	900	1000	100	200	300	400	2	6	$1 \cdot 10^7$	$\pi/6$
9	1000	100	200	300	400	500	2	6	$5 \cdot 10^6$	$\pi/6$
10	100	200	300	400	500	600	2	6	$5 \cdot 10^6$	$-\pi/6$
11	200	300	400	500	600	700	2	6	$5 \cdot 10^6$	0
12	300	400	500	600	700	800	2	6	$5 \cdot 10^6$	$\pi/4$
13	400	500	600	700	800	900	2	6	$5 \cdot 10^6$	0
14	500	600	700	800	900	1000	2	6	$5 \cdot 10^6$	0
15	600	700	800	900	1000	100	3	8	$5 \cdot 10^6$	$-\pi$
16	700	800	900	1000	100	200	3	8	$5 \cdot 10^6$	0
17	800	900	1000	100	200	300	3	8	$5 \cdot 10^6$	$\pi/4$
18	900	1000	100	200	300	400	3	8	$4 \cdot 10^6$	0
19	1000	100	200	300	400	500	3	8	$4 \cdot 10^6$	$\pi/2$
20	100	200	300	400	500	200	3	8	$4 \cdot 10^6$	$-\pi/2$
21	200	300	400	500	200	300	3	8	$4 \cdot 10^6$	π
22	300	400	500	200	300	400	4	12	$4 \cdot 10^6$	$-\pi$
23	400	500	200	300	400	500	4	12	$4 \cdot 10^6$	$\pi/6$
24	500	200	300	400	500	600	4	12	$4 \cdot 10^6$	$\pi/6$
25	700	800	900	1000	100	200	4	12	$2 \cdot 10^6$	$-\pi/6$

Пример.

В прямоугольном пазу электрической машины находится шина высотой $h = 1,5$ см и шириной $b = 0,5$. Проводимость материала шины $\gamma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м, магнитная проницаемость $-\mu_0$ частота $f = 50$ Гц, начальная фаза тока $\psi_0 = 0$, ток в шине $I = 100$ А.

С учетом указанных в задании допущений изобразим модель электромагнитной системы (рис.10.2 а).

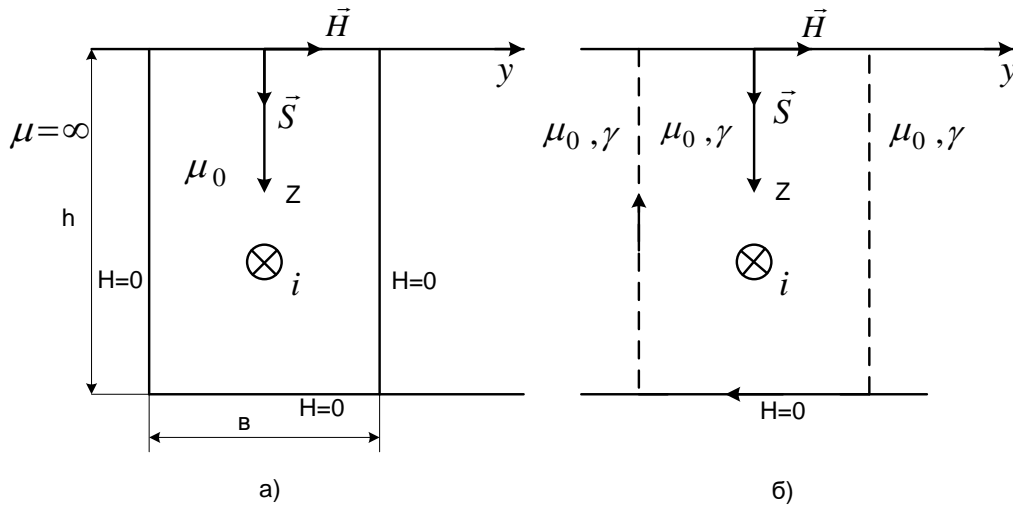


Рис. 10.2. Модель электромагнитной системы

При бесконечной большой магнитной проницаемости ферромагнитного материала, в котором сделан паз, магнитная индукция в ферромагнитном материале будет конечная, а напряженность поля будет в нем равна нулю. Учет границ приводит к модели рис.10.2 (метод отражения).

Решение приведем в декартовой системе координат.

В шине напряженность магнитного поля \vec{H} направлена по оси y , напряженность электрического поля – по оси x . Вектор Пойнтинга направлена по оси z . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность шины и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде. Величины поля изменяются по гармоническому закону.

Запишем уравнение поля для комплексов амплитуд:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{\delta}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m, \quad (10.1)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_m, \quad (10.2)$$

$$\text{div} \dot{\vec{H}}_m = 0, \quad (\text{как следствие}) \quad (10.2)$$

$$\text{div} \dot{\vec{\delta}}_m = 0, \quad (\text{как следствие}) \quad (10.1)$$

Уравнения (10.1) и (10.2) для нашего случая плоской волны приводится к уравнению

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\mu_0\gamma \dot{H} \quad (10.3)$$

Здесь $\dot{H} = \dot{H}_{my}(z)$

Найдем решение уравнения (10.3)

Уравнение (10.3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = C_1 e^{pz} + C_2 e^{-pz} \quad (10.4)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые определяются на граничных условиях:

$$p = \sqrt{j\omega\mu_0\gamma} = (1+j)\kappa, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\delta}{2}}.$$

Определим постоянные интегрирования.

По закону полного тока при $z=0$ $\dot{H} = \dot{I}/b$, при $z=h$ имеем $\dot{H} = 0$. Для определения постоянных интегрирования составим два уравнения :

$$C_1 + C_2 = \frac{\dot{I}}{b},$$

$$C_1 e^{ph} + C_2 e^{-ph} = 0,$$

откуда:

$$C_1 = \frac{\dot{I}}{b} \frac{1}{1 - e^{2ph}}, \quad C_2 = -\frac{\dot{I}}{b} \frac{e^{2ph}}{1 - e^{2ph}}.$$

тогда

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\text{sh}p(h-z)}{\text{sh}p}. \quad (10.5)$$

Из (10.1) находим:

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p\dot{I}}{\gamma b} \frac{\text{ch}p(h-z)}{\text{sh}p}, \quad (10.6)$$

$$\dot{\delta} = \gamma \dot{E} \quad (10.7)$$

Подставляя числовые данные, имеем:

$$p = \sqrt{j\omega\mu_0\gamma} = 150e^{j\frac{\pi}{4}} = 106(1+j), \quad \text{м}^{-1},$$

$$\dot{H} = \dot{H} \operatorname{sh} p(h-z), \quad \frac{A}{m},$$

где

$$\dot{H}_0 = \frac{\dot{I}}{b} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} ph} = \frac{100}{0,005 \operatorname{sh}[106(1+j)0,015]} = 7,83 \cdot 10^3 e^{-j91,1}.$$

$$\dot{E} = \dot{E}_0 \operatorname{ch} p(h-z).$$

где \dot{E}_0 - напряженность электрического поля на нижней грани шины;

$$\dot{E}_0 = \frac{\dot{I} p}{\gamma b \operatorname{sh} ph} = \frac{100 \cdot 1,5 e^{j45^\circ}}{5,7 \cdot 10^7 \cdot 0,005 \cdot 2,55 e^{j91,1^\circ}} = 0,02 e^{-j46,1^\circ},$$

$$\dot{\delta} = \gamma \dot{E} = \gamma \dot{E}_0 \operatorname{ch} p(h-z) = \dot{\delta}_0 \operatorname{ch} p(h-z), \quad \frac{A}{m^2};$$

где $\dot{\delta}_0 = \gamma \dot{E}_0 = 5,7 \cdot 10^7 \cdot 0,02 e^{-j46,1^\circ}$ - плотность тока на нижней грани шины.

Строим по данным расчета зависимости $H(z)|_{t=0}$; $\delta(z)|_{t=0}$; $H_m(z)$; $\delta_m(z)$ (рис. 10.3).

Определим комплексное сопротивление шины длиной $l = 1$ м.

Вектор Пойнтинга внешней поверхности шины:

$$S(z=0) = \dot{E}(z=0) \cdot H(z=0)^* = \frac{\dot{I} p}{\gamma b} \operatorname{cth}(ph) \frac{I^*}{b} = I^2 \frac{p}{\gamma b^2} \operatorname{cth} ph.$$

Комплексное сопротивление:

$$Z = r + jx = \frac{S l b}{I^2} = \frac{l p}{\gamma b} \operatorname{cth} ph = 3,41 \cdot 10^{-4} + j3,43 \cdot 10^{-4}, \text{ Ом.}$$

Определяем мощность, теряемую на 1 м длины шины

$$P = r I^2 = 3,41 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 = 3,41 \text{ Вт.}$$

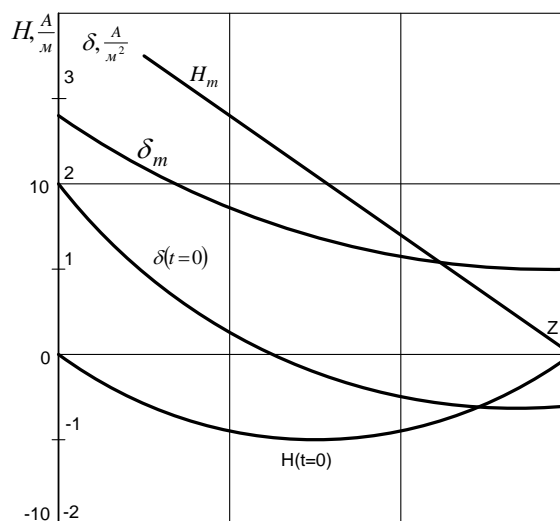


Рис.10.3

Задача 11

В прямоугольном пазу машины находятся две медные шины (рис. 11.3). Ток в каждой шине $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. высота каждой шины h , ширина b , проводимость материала γ , магнитная проницаемость μ_0 , частота тока $f = 50$ Гц.

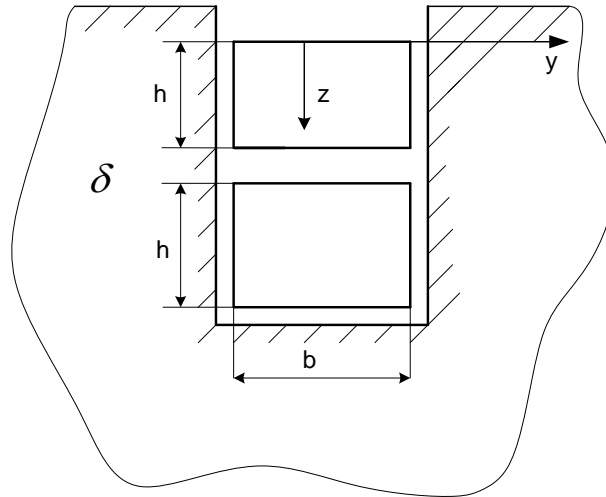


Рис.11.1

Требуется:

1. Рассчитать электромагнитное поле: получить выражение для составляющих напряженности магнитного поля и плотности тока в шинах;
 2. Построить кривые распределения напряженности магнитного поля и плотности тока в шинах в зависимости от координаты для момента времени $t = 0$;
 3. Построить кривые распределения амплитудных значений напряженности магнитного поля и плотности тока в шинах в зависимости от координаты z ;
 4. Определить активное и внутреннее реактивное сопротивление шин на 1 м длины;
 5. Мощность, теряемую в шинах на 1 м длины;
- параметры системы заданного варианта взять из табл. 10.1

Указания

Расчет произвести при допущениях, указанных в задании 10. Зазор между шинами мал ($\delta \rightarrow 0$).

Литература

1. Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Учебник для вузов. Том 3. – 4-е изд./ К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин – СПб.: Питер, 2003.-377с.:ил.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники, т.2, Л., Энергоиздат, 1981.
3. Солнышкин Н.И., Федоров В.Н. Лабораторный практикум по теории электромагнитного поля. Псков, 2005.

Цилиндрические Функции (Функции Бесселя)

Модули и аргументы функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода: $gr = \sqrt{-jkr} = \sqrt{-jx}$.

$$J_0(\sqrt{-jx}) = b_0(x)e^{j\beta_0(x)}; \quad J_1(\sqrt{-jx}) = b_1(x)e^{j\beta_0(x)}$$

x	b_0	β_0^0	b_1	β_1^0
0	1	0	0	-45
0,1	1,0000	0,150	0,0500	-44,931
0,2	1,0001	0,567	0,1000	-44,714
0,3	1,0002	1,283	0,1500	-44,350
0,4	1,0003	2,283	0,2000	-43,854
0,5	1,0010	3,617	0,2500	-43,213
0,6	1,0020	5,150	0,3001	-42,422
0,7	1,0037	7,000	0,3502	-41,489
0,8	1,0063	9,150	0,4010	-40,358
0,9	1,0102	11,550	0,4508	-39,207
1,0	1,0155	14,217	0,5014	-37,837
1,1	1,0226	17,167	0,5508	-36,343
1,2	1,0319	20,333	0,6032	-34,706
1,3	1,0436	23,750	0,6549	-32,928
1,4	1,0584	27,367	0,7070	-31,011
1,5	1,0768	31,183	0,7599	-28,952
1,6	1,0983	35,167	0,8136	-26,768
1,7	1,1243	39,300	0,8683	-24,451
1,8	1,1545	43,550	0,9223	-22,000
1,9	1,1890	47,883	0,9819	-19,428
2,0	1,2286	52,283	1,0411	-16,732
2,1	1,2743	56,750	1,1022	-13,923
2,2	1,3250	61,233	1,1659	-11,000
2,3	1,3810	65,717	1,2325	-7,970
2,4	1,4421	70,183	1,3019	-4,838
2,5	1,5111	74,650	1,3740	-1,613
2,6	1,5830	79,114	1,4505	1,701
2,7	1,6665	83,499	1,5300	5,099
2,8	1,7541	87,873	1,6148	8,570
2,9	1,8486	92,215	1,7045	12,111
3,0	1,9502	96,518	1,7998	15,714
3,1	2,0592	100,789	1,9012	19,372
3,2	2,1761	105,032	2,0088	23,081
3,3	2,3000	109,252	2,1236	26,833
3,4	2,4342	113,433	2,2459	30,622
3,5	2,5759	117,605	2,3766	34,445

Приложение 2
(продолжение)

x	b_0	β_0^0	b_1	β_1^0
3,6	2,7285	121,760	2,5155	38,295
3,7	2,8895	125,875	2,6640	42,171
3,8	3,0613	129,943	2,8226	46,067
3,9	3,2443	134,096	2,9920	49,978
4,0	3,4391	138,191	3,1729	53,905
4,1	3,6463	142,279	3,3662	57,840
4,2	3,8671	146,361	3,5722	61,789
4,3	4,1015	150,444	3,7924	65,743
4,4	4,3518	154,513	4,0274	69,706
4,5	4,6179	158,586	4,2783	73,672
4,6	4,9012	162,657	4,5460	77,638
4,7	5,2015	166,726	4,8317	81,615
4,8	5,5244	170,795	5,1390	85,590
4,9	5,8696	174,865	5,4619	89,571
5,0	5,2312	178,933	5,8118	93,549
5,1	6,6203	183,002	6,1793	97,533
5,2	7,0339	187,071	6,5745	101,518
5,3	7,4752	191,140	6,9960	105,504
5,4	7,9455	195,209	7,4456	109,492
5,5	8,4473	199,279	7,9253	113,482
5,6	8,9821	203,348	8,4370	117,473
5,7	9,5524	207,417	8,9830	121,465
5,8	10,160	211,487	9,5657	125,459
5,9	10,809	215,556	10,187	129,454
6,0	11,501	219,625	10,850	133,452
6,1	12,239	223,694	11,558	137,450
6,2	13,027	227,762	12,313	141,452
6,3	13,865	321,830	13,119	145,454
6,4	14,761	235,987	13,987	149,458
6,5	15,717	239,964	14,896	153,462
6,6	16,737	244,031	15,876	157,469
6,7	17,825	248,098	16,921	161,477
6,8	18,986	252,164	18,038	165,486
6,9	20,225	256,228	19,228	169,498
7,0	21,548	260,294	20,500	173,510
7,1	22,959	264,358	21,858	177,523
7,2	24,465	268,422	23,308	181,536
7,3	26,074	272,486	24,856	185,554
7,4	27,790	276,540	26,509	189,571
7,5	29,622	280,612	28,274	193,589
7,6	31,578	284,674	30,158	197,608
7,7	33,667	288,736	32,172	201,627
7,8	35,896	292,798	34,321	205,646
7,9	38,276	296,859	36,617	209,670
8,0	40,817	300,920	29,070	213,692

Приложение 2
(продолжение)

x	b_0	β_0^0	b_1	β_1^0
8,1	43,532	304,891	41,691	217,716
8,2	46,429	309,042	44,487	221,739
8,3	49,524	313,102	47,476	225,764
8,4	52,829	317,162	50,670	229,790
8,5	56,359	321,222	54,081	233,815
8,6	60,129	325,282	57,725	237,842
8,7	64,155	329,341	61,613	241,868
8,8	68,455	333,400	65,779	245,896
8,9	73,049	337,459	70,222	249,925
9,0	77,957	341,516	74,971	253,953
9,1	83,199	343,577	80,048	257,981
9,2	88,796	349,566	85,466	262,011
9,3	94,781	353,693	91,259	266,041
9,4	101,128	357,751	97,449	270,071
9,5	108,003	361,811	104,063	274,102
9,6	115,291	365,868	111,131	278,133
9,7	123,110	369,958	118,683	282,164
9,8	131,429	373,983	126,752	286,197
9,9	140,300	378,002	135,374	290,229
10,0	149,831	382,009	144,586	294,266