

Министерство образования и науки Российской Федерации

Псковский государственный политехнический институт

***И.А. Полетаев
О.А. Полетаева
В.М. Трофимов***

Вычислительная математика

***Методические указания к
лабораторным работам***

**Псков
2006**

СОДЕРЖАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2	12
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3	16
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4	22
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5	25
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6	29
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7	36
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8	38
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9	42
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10	47
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11	52
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 12	54
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13	61
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14	62

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических указаниях содержится описание четырнадцати работ, помогающих исследовать методы решения задач численного анализа, с тридцатью различными вариантами заданий.

При выполнении работы необходимо предварительно ознакомиться с соответствующим методом и его алгоритмом, отчетливо представлять себе исходные данные задачи, процесс решения и ожидаемые результаты. Далее должна быть составлена блок-схема, по которой пишется программа на языке высокого уровня. В качестве языка программирования может использоваться любой язык, например Паскаль. Отладка программы на ЭВМ с анализом полученных результатов составляют заключительную стадию работы. Возможна проверка полученного результата при помощи специализированных математических программ, использующих язык прикладной задачи.

При составлении отчета в нем, после титульного листа, указывается вариант задания, используемые вычислительные формулы, блок-схема алгоритма, текст программы на языке высокого уровня, результаты и выводы по используемым методам поиска решения.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Решение нелинейных уравнений

Нелинейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида:

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

где $f(x)$ – непрерывная, дифференцируемая функция, определенная на некотором бесконечном или конечном интервале $a < x < b$.

Корнем уравнения (1.1) называется такое значение x , равное ξ , которое обращает уравнение в тождество:

$$f(\xi) = 0 \quad (1.2)$$

Найти корни уравнения (1.1) точно удастся лишь в частных случаях. Кроме того, часто уравнения содержат коэффициенты, известные лишь приблизительно, и следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Поэтому разработаны методы численного решения уравнения вида (1.1), которые позволяют отыскать приближенные значения корней этого уравнения.

При численном решении уравнения (нахождение корней) в общем случае необходимо проделать три процедуры:

- а) установить количество корней и область значений аргумента, которой принадлежат эти корни;
- б) выделить участки изолированности корней, то есть такие участки, внутри которых расположен только один корень;
- в) сузить изолированный участок до заданных размеров, то есть найти корень с заданной точностью.

При пользовании большинством методов решения уравнений предполагается, что первые две процедуры выполнены, то есть известен участок изолированности корня. Графически корень нелинейного уравнения изображается точкой пересечения графика функции $f(x)$ и оси Ox (рис.1).

Условием существования корня уравнения (1.1) на промежутке $[a, b]$ значений аргумента x для непрерывной функции $f(x)$ является неравенство:

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0 \quad (1.3)$$

Геометрически оно обозначает, что функция $f(x)$ на концах промежутка $[a, b]$ имеет значения разных знаков.

Если $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ не только непрерывна, но еще и монотонна (то есть ее производная не изменяет знака), то тогда, при выполнении условия (1.3), на отрезке $[a, b]$ содержится только один корень уравнения (1.1).

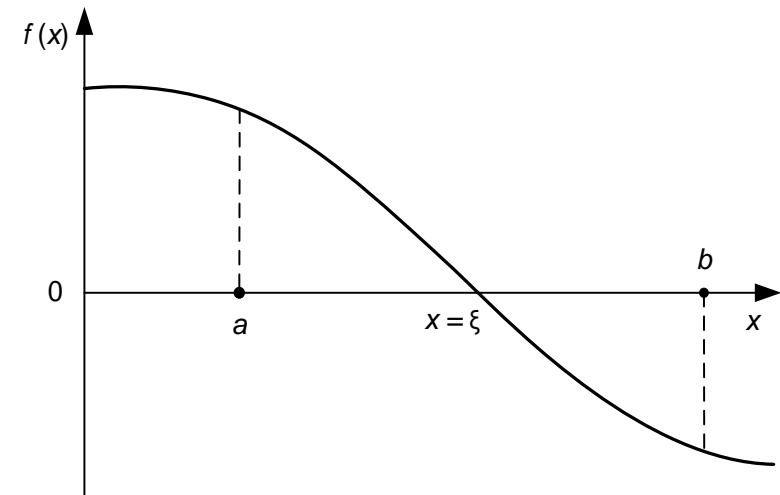


Рис. 1. Корень нелинейного уравнения.

1.2. Метод проб

Метод проб является одним из простейших численных методов поиска корней. Суть его состоит в том, что некоторый заданный отрезок значений аргумента $[a_1, b_1]$ разбивается на небольшое число подотрезков, и для каждого из них проверяется выполнение условия (1.3). Тот из подотрезков, для которого условие (1.3) выполняется, содержит корень, поэтому его разбивают на более мелкие подотрезки. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет найден подотрезок достаточно малой длины (соизмеримый с заданной погрешностью), содержащий корень.

В качестве расширения метода можно предложить схему, в которой после нахождения корня аналогично производится проверка оставшейся части интервала $[a, b]$. Такая модификация метода хороша тем, что позволяет найти все корни на заданном промежутке.

1.3. Метод половинного деления

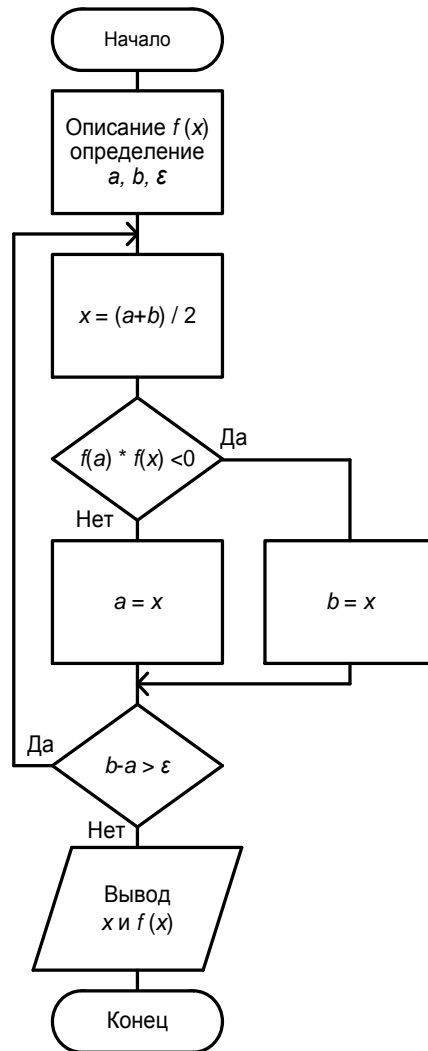


Рис. 2. Блок-схема алгоритма метода половинного деления.

Для применения этого метода необходимо, чтобы функция на отрезке $[a, b]$ содержала только один корень. При нахождении этого корня отрезок $[a, b]$ делится пополам, то есть выбирается начальное приближение $x = (a+b)/2$, затем выбирается тот из отрезков $[a, x]$ или $[x, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый отрезок снова делится пополам и так далее, до тех пор, пока длина отрезка, на концах которого функция имеет противоположные знаки, не будет меньше заданного числа ε . Блок-схема метода приведена на рис. 2.

1.4. Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод касательных) состоит в том, что приближенным значением корня \tilde{x} считается точка пересечения касательной к кривой $f(x)$ и оси OX (рис. 3).

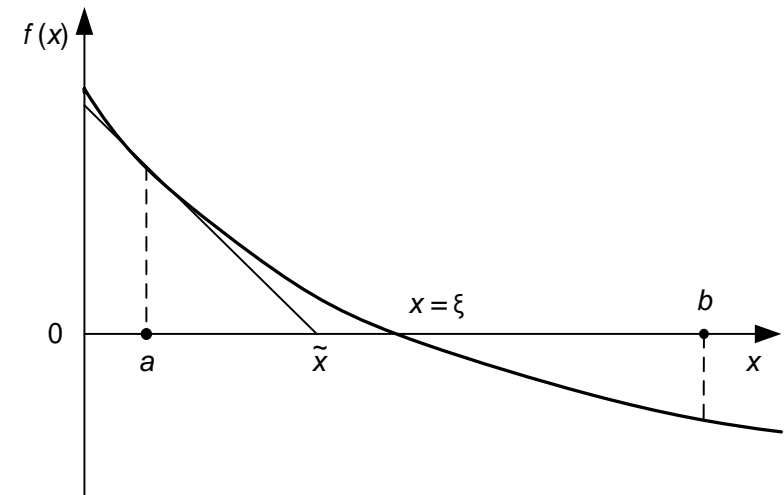


Рис. 3. Корень уравнения, определенный методом Ньютона.

Для применения метода необходимо:

- чтобы на отрезке $[a, b]$ производная $f'(x)$ была всюду отлична от нуля;
- чтобы функция $f(x)$ была на $[a, b]$ монотонна (производная сохраняла знак);

в) в качестве начального приближения следует выбирать такую точку x_0 , для которой выполняется условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (то есть точка, в которой кривизна и функция имеют одинаковые знаки).

Рабочая формула метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.4)$$

позволяет найти последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, сходящуюся к точному значению корня ξ уравнения (1.1). Критерием окончания вычислительного процесса является выполнение условия:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Алгоритм метода

1. Выбрать начальное приближение x_0 , принадлежащее промежутку $[a, b]$, положить $x = x_0$.
2. Вычислить $\Delta = \frac{f(x)}{f'(x)}$.
3. Если $|\Delta| < \varepsilon$, то корень $\xi = x - \Delta$, вычисления окончены.
4. Положить $x = x - \Delta$ и вернуться к шагу 2.

1.5. Метод итераций

Метод итераций (последовательных приближений) предполагает, что уравнение (1.1) преобразовано к виду:

$$x = \varphi(x). \quad (1.5)$$

Последовательные приближения корня x_0, x_1, x_2, \dots задаются рабочей формулой:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сходится к точному значению корня ξ , если для любого $x \in [a, b]$ выполнено условие сходимости метода:

$$|\varphi'(x)| < 1 \quad (1.7)$$

Алгоритм метода

1. Выбрать начальное приближение $x \in [a, b]$.
2. Вычислить $\Delta = \varphi(x)$.

3. Если $|x - \Delta| < \varepsilon$, где ε - заданная точность, то $\xi = \Delta$ и вычисления окончены.
4. Положить $x = \Delta$ и перейти к шагу 2.

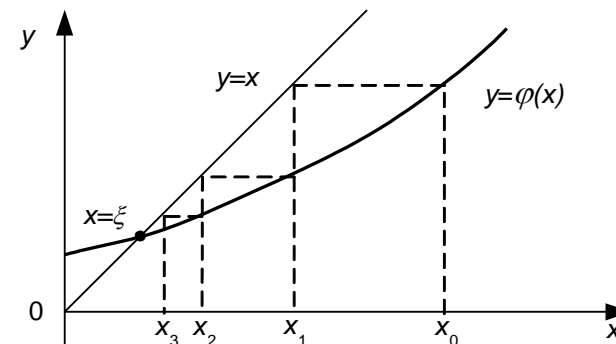


Рис. 4. Последовательное нахождение корня методом итераций.

Вопрос о преобразовании уравнения (1.1) к виду (1.5) решается в каждом отдельном случае по своему. В общем случае можно рекомендовать некоторый универсальный, но довольно громоздкий прием. Если ищется корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, то необходимо найти число

$$\lambda = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad (1.8)$$

равное значению точной верхней границы модуля производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда $\varphi(x)$ можно выбрать в виде:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{\lambda} f(x); \quad (1.9)$$

при этом условие сходимости (1.7) выполняется автоматически.

Варианты заданий приведены в табл. 1. Для всех заданий принять точность вычислений $\varepsilon = 10^{-5}$.

Таблица 1. Варианты заданий к лабораторной работе № 1.

№ вар.	Уравнение	Отрезок, содержащий корень	Метод численного решения
1	$3\sin\sqrt{x} + 0,35x - 3,8 = 0$	[2;3]	итераций
2	$0,25x^3 + x - 1,2502 = 0$	[0;2]	Ньютона
3	$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,5 = 0$	[0,4;1]	половинного деления
4	$x - \frac{1}{3 + \sin 3,6x} = 0$	[0;0,85]	итерация
5	$0,1x^2 - x \ln x = 0$	[1;2]	Ньютона
6	$\operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3} = 0$	[0;0,8]	половинного деления
7	$\arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3} = 0$	[0;1]	итераций
8	$3x - 4 \ln x - 5 = 0$	[2;4]	Ньютона
9	$\cos \frac{2}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$	[1;2]	половинного деления
10	$\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x = 0$	[0;1]	итераций
11	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	[0;1]	Ньютона
12	$\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2 \ln x = 0$	[1;3]	половинного деления
13	$x - 2 + \sin \frac{1}{x} = 0$	[1,2;2]	итераций
14	$e^x + \ln x - 10x = 0$	[3;4]	Ньютона
15	$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$	[1;2]	половинного деления

№ вар.	Уравнение	Отрезок, содержащий корень	Метод численного решения
16	$1 - x + \sin x - \ln(1 + x) = 0$	[0;1,5]	итераций
17	$3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0$	[1;3]	Ньютона
18	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg} x = 0$	[0;1]	половинного деления
19	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$	[0,5;1]	итераций
20	$3 \ln^2 x + 6 \ln x - 5 = 0$	[1;3]	Ньютона
21	$\sin x^2 + \cos x^2 - 10x = 0$	[0;1]	половинного деления
22	$x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$	[2;3]	итераций
23	$2x \sin x - \cos x = 0$	[0,4;1]	Ньютона
24	$e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2 = 0$	[-1;0]	половинного деления
25	$\ln x - x + 1,8 = 0$	[2;3]	итераций
26	$x \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} = 0$	[0,2;1]	Ньютона
27	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + x = 0$	[1;2]	половинного деления
28	$0,4 + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - x = 0$	[1;2]	итераций
29	$\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{1-x} = 0$	[0;1]	Ньютона
30	$0,6 \cdot 3^x - 2,3x - 3 = 0$	[2;3]	половинного деления

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Отделение и уточнение корней нелинейных уравнений

Данная работа аналогична работе №1 с той разницей, что здесь задан ориентировочный участок функции, где могут быть один или несколько корней. Поэтому необходимо сначала отделить и определить достаточно малый участок, где есть корень, методом проб, а затем уточнить значение корня быстроходящимся методом. Так как корней на заданном участке может быть несколько, например, как показано на рис. 5, то после уточнения корня необходимо проверять наличие корней и далее до конца участка.

При выполнении задания для метода проб отрезок предлагается делить на 20 частей. Из-за сложности анализа функций на сходимость для уточнения корней использовать метод половинного деления с заданной точностью.

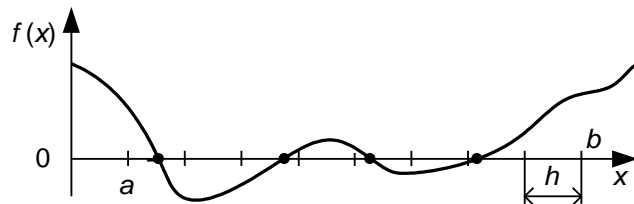


Рис. 5. Отделение корней нелинейного уравнения.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 6, варианты заданий в таблице 2.

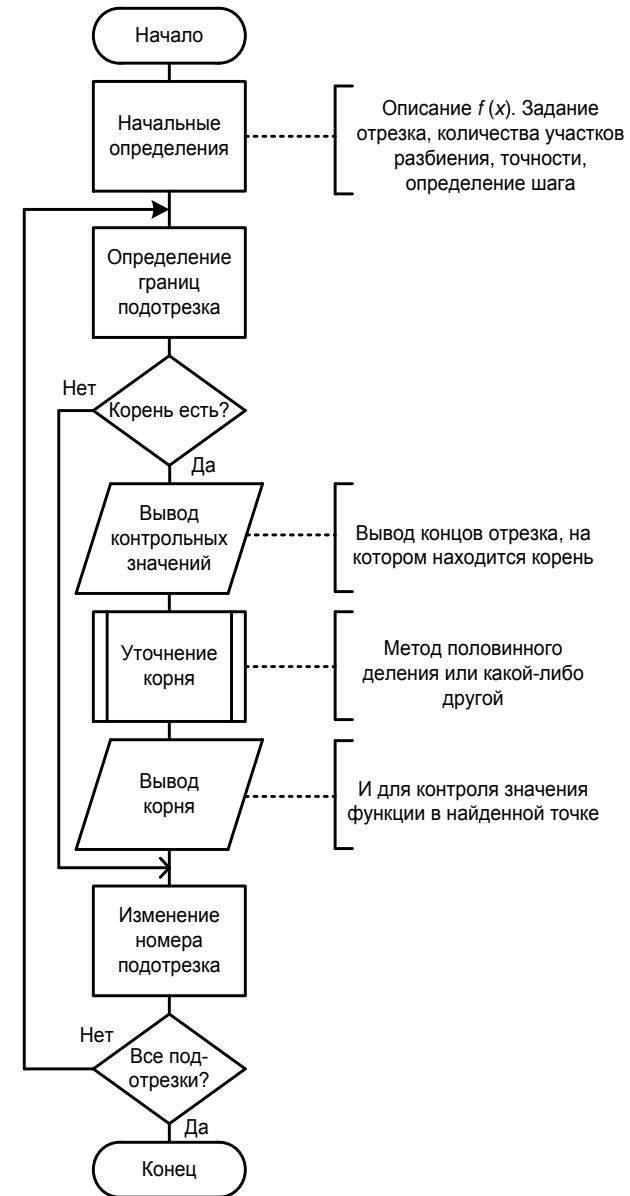


Рис. 6. Блок-схема алгоритма отделения и уточнения корней уравнения.

Таблица 2. Варианты заданий к лабораторной работе № 2.

№ вар.	Уравнение	Отрезок	Заданная точность ε
1	$\operatorname{sh} x \cdot \sin x^{1.5} = 0$	[1; 5]	10^{-3}
2	$\arctg [\cos (\sqrt{x} \cdot \ln x)] \cdot x = 0$	[0,5; 26]	10^{-4}
3	$x^3 + 3x^2 - 8x - 3 = 0$	[-5; 3]	10^{-3}
4	$\cos (\operatorname{sh} x) = 0$	[1; 3]	10^{-4}
5	$\operatorname{tg} (\sin e^{-x}) - x = 0$	[-2; 1]	10^{-3}
6	$\sin 2x + \cos 3x = 0$	[0; 3]	10^{-4}
7	$5 \sin (10\sqrt{x}) - x = 0$	[2; 5]	10^{-3}
8	$x^4 + 5x^3 - 2x - 2 = 0$	[-5; 1]	10^{-4}
9	$e^{\sin x} - 1 = 0$	[3; 10]	10^{-3}
10	$\cos x - 0,1\sqrt{x} = 0$	[0; 10]	10^{-4}
11	$e^{3\sin x} - x = 0$	[2; 10]	10^{-3}
12	$10\cos x + \operatorname{sh} x = 0$	[-2; 3]	10^{-4}
13	$\sin^5 x + \cos^5 x = 0$	[-5; 5]	10^{-3}
14	$x^2 - 0,1e^x - 5 = 0$	[-3; 7]	10^{-4}
15	$x^2 - 5\sin 5x + e^{-x} = 0$	[0; 2]	10^{-3}

№ вар.	Уравнение	Отрезок	Заданная точность ε
16	$\sin \sqrt{x^2 + 5} \cdot \ln 7x = 0$	[2; 10]	10^{-4}
17	$5 \sin^2 x - x = 0$	[2; 5]	10^{-3}
18	$\sin^3 x - \cos^3 x = 0$	[-5; 5]	10^{-4}
19	$\cos x + \sqrt{e^{-x}\sqrt{x}} = 0$	[2; 8]	10^{-3}
20	$\ln (\sin^2 x) + 0,2x = 0$	[1; 5]	10^{-4}
21	$\sin^2 x^2 + 3 \cos x - 0,2e^{-x} = 0$	[-5; 5]	10^{-3}
22	$e^{\sin x - \cos x} - 0,2x = 0$	[0; 10]	10^{-4}
23	$\sqrt{5 \cos x - \ln x} - 0,5x = 0$	[0,1; 5]	10^{-3}
24	$10^{\sin x} - \sqrt{1 + \ln(1+x)} = 0$	[2; 10]	10^{-4}
25	$10 \ln x + 0,2x^2 - 4,5x + 1 = 0$	[1; 18]	10^{-3}
26	$3x^2 - x + \sin 15x = 0$	[0,1; 0,7]	10^{-4}
27	$\ln \sin^2 x - \ln \cos^2 x = 0$	[5; 10]	10^{-3}
28	$e^{\sin x} - e^{\cos x} = 0$	[-5; 5]	10^{-4}
29	$x^5 - x - \operatorname{sh} x = 0$	[-2; 2]	10^{-3}
30	$\sin^5 x + \cos^5 x = 0$	[-5; 5]	10^{-4}

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Вычисление определенных интегралов с заданным шагом интегрирования

Численные методы нахождения значений определенного интеграла $I = \int_a^b f(x) dx$ используются в тех случаях, когда неизвестна первообразная для функции $f(x)$ или ее вычисление сопряжено с трудностями. Большинство методов основано на замене подынтегральной функции аппроксимирующей функцией более простого вида и последующим интегрированием отрезков этой более простой функции.

1. Метод прямоугольников.

Этот метод основан на аппроксимации кусочно-постоянными функциями. Рабочая формула метода:

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \Delta) \quad (3.1)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih$$

Здесь n -число отрезков разбиения.

В случае, если:

$\Delta=0$ – получаем рабочую формулу левых прямоугольников;

$\Delta=h/2$ – формулу центральных прямоугольников;

$\Delta=h$ – формулу правых прямоугольников.

2. Метод трапеций.

В этом случае аппроксимация производится кусочно-линейной функцией в соответствии с рис. 7. Рабочая формула метода:

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \quad (3.2)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih$$

Где n – число отрезков разбиения.

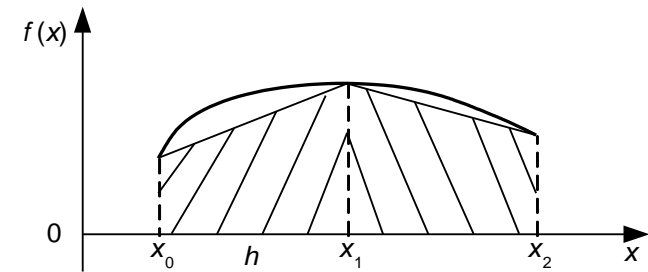


Рис. 7. Замена значения интеграла суммой площадей трапеций.

3. Метод Симпсона.

В этом случае подынтегральная функция аппроксимируется отрезками парабол. Рабочая формула метода:

$$I = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=2(2)}^{n-2} f(x_i) + 4 \sum_{i=1(2)}^{n-1} f(x_i) \right] \quad (3.3)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih$$

Здесь n – число отрезков разбиения (обязательно четное).

Формулу можно привести к виду

$$I = \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} [3 - (-1)^i] f(x_i) \right\} \quad (3.4)$$

Блок-схема алгоритма примера приведена на рис. 8, варианты заданий в табл. 3. Вычислить приведенный в варианте интеграл методами центральных прямоугольников, трапеций и Симпсона при одинаковом заданном количестве отрезков разбиения.

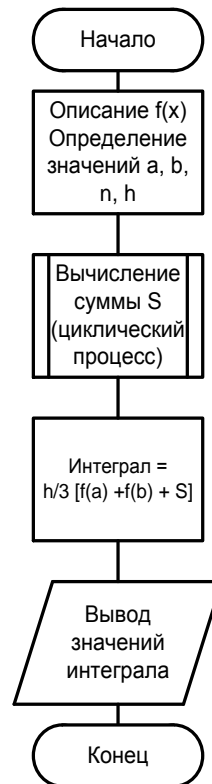


Рис. 8. Блок-схема вычисления интеграла методом Симпсона.

Таблица 3. Варианты задания к лабораторной работе № 3.

№ вар.	Интеграл	Количество частей разбиения
1	$\int_1^{3,5} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$	30
2	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) dx$	54
3	$\int_2^3 \frac{1}{x \lg x} dx$	36

№ вар.	Интеграл	Количество частей разбиения
4	$\int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x} dx$	52
5	$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	104
6	$\int_0^1 x e^x \sin x dx$	48
7	$\int_0^2 x \operatorname{sh} x dx$	48
8	$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$	204
9	$\int_1^{2,5} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$	44
10	$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$	48
11	$\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$	36
12	$\int_1^3 x^x (1 + \ln x) dx$	40
13	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x+2x^2}} dx$	44

№ вар.	Интеграл	Количество частей разбиения
14	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 0,16}}{x} dx$	160
15	$\int_0^1 2^{3x} dx$	240
16	$\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	22
17	$\int_0^2 \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$	48
18	$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$	22
19	$\int_0^{1,9999} x^2 \sqrt{4-x^2} dx$	96
20	$\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$	60
21	$\int_1^e (x \ln x)^2 dx$	52
22	$\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$	176
23	$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx$	36

№ вар.	Интеграл	Количество частей разбиения
24	$\int_1^{1,5} \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$	52
25	$\int_0^{1,5} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx$	132
26	$\int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$	40
27	$\int_0^1 \frac{1}{(3 \sin x + 2 \cos x)^2} dx$	78
28	$\int_1^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$	40
29	$\int_1^2 \frac{x^3}{3+x} dx$	72
30	$\int_1^2 \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$	36

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Вычисление определенных интегралов с заданной точностью

Обычно при вычислении интегралов заранее известна точность, с которой необходимо произвести расчет. Количество же участков разбиения зависит от свойств подынтегральной функции и выбирается намного больше, чем это необходимо для обеспечения заданной точности.

Чтобы не делать лишних вычислений (а с ростом вычислений увеличивается и аппаратная ошибка, связанная с конечной длиной числа, представленного в ЭВМ), используют алгоритм с удвоением отрезков разбиения и сравнением интегралов, вычисленных с n отрезками разбиения и $2n$.

Алгоритм метода

1. Вычисление интеграла с двумя отрезками разбиения.
2. Увеличение отрезков разбиения в 2 раза.
3. Вычисление интеграла с новым количеством отрезков.
4. Сравнение предыдущего и вычисленного значения интеграла.

Если разность значений больше заданной точности, то перейти на шаг 2, иначе конец алгоритма.

Если вычисление интеграла (шаг 3) производить по алгоритму, приведенному в работе №3, то вычисление одних и тех же значений функции будет проводиться многократно, что не рационально. Желательно при вычислении интеграла с новым количеством отрезков использовать результаты предыдущих вычислений. Это достигается следующим образом.

На рис. 9 представлена схема вычисления интеграла по приведенному выше алгоритму. Очевидно, что значения $f(x_0)$, и $f(x_n)$ постоянны для интеграла с любым количеством отрезков разбиения, поэтому их можно вычислить один раз в начале программы. Значения промежуточных результатов (x_1^1 для двух отрезков разбиения) будут использоваться как четные слагаемые для следующего значения интеграла (x_2^2 для четырех отрезков разбиения). Таким образом, остается вычислить только сумму для нечетных значений функции.

Блок-схема алгоритма для данного примера с использованием метода Симпсона приведена на рис. 10. Формулы интегралов для вариантов заданий приведены в табл. 3 к лабораторной работе №3, точность вычислений для всех вариантов принять 10^{-5} .

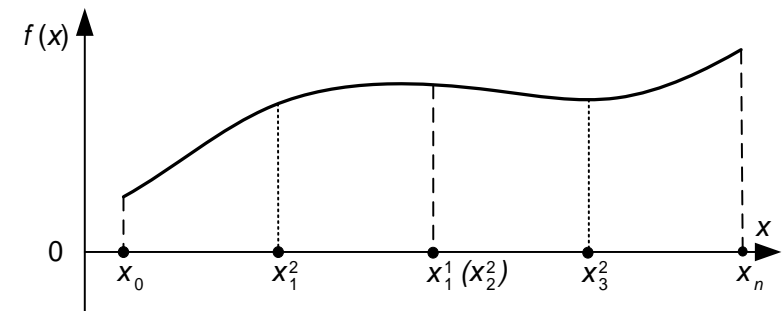


Рис. 9. Вычисление интеграла с двукратным увеличением количества отрезков разбиения.

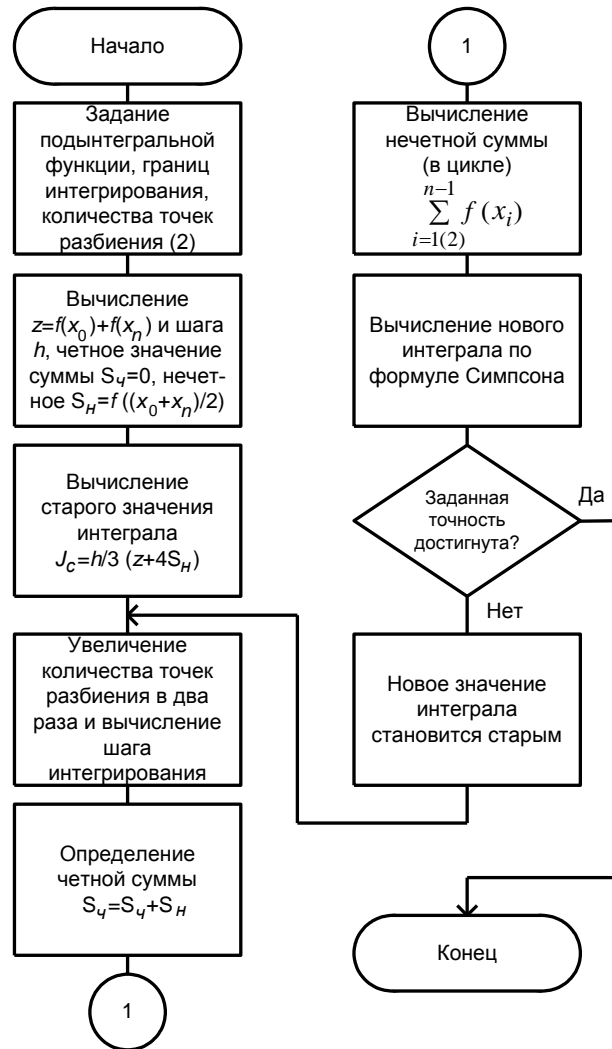


Рис. 10. Блок-схема алгоритма вычисления интеграла с заданной точностью.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Поиск корней сложной функции с использованием подпрограмм

Часто при решении задач численного анализа используются кусочно-непрерывные функции, функции, описанные рядом, интегралы и так далее, которые нельзя описать в одном операторе. Поэтому необходимо использовать подпрограммы, в частности подпрограммы-функции. Примером данной задачи является поиск корней уравнения, заданного интегралом.

Пример.

Найти корень уравнения $f(a) = 0$, соответствующего функции согласно варианту задания, методом половинного деления на указанном отрезке с заданной точностью.

Здесь вычисление $f(a)$ необходимо оформить в виде подпрограммы-функции с аргументами a и ε (точность вычисления интеграла). Интеграл вычисляется методом Симпсона с заданной точностью. Начальная точность вычисления интеграла 0,2, затем увеличивается в 2 раза на каждом шаге по мере уменьшения отрезка, на котором находится корень. Когда корень найден, значение функции выводится с точностью 10^{-5} .

Программа должна состоять из основной программы и подпрограммы-функции.

Основная программа составляется по блок-схеме рис. 2, приведенной в лабораторной работе №1, а описание функции оформляется в виде подпрограммы. Так же необходимо в подпрограмме предусмотреть увеличение точности вычисления интеграла (не путать с точностью вычисления корня) при каждом последующем приближении. Значения a и $f(a)$ (контрольные точки) выводить в каждом цикле, чтобы определить правильность работы программы.

Подпрограмма-функция составляется по блок-схеме рис. 10, приведенной в лабораторной работе 4. Входными параметрами будут являться верхняя граница интегрирования и заданная точность. Все остальные значения, в том числе и подынтегральная функция, могут задаваться локально внутри подпрограммы. Варианты заданий приведены в таблице 4.

Таблица 4. Варианты заданий к лабораторной работе №5.

№ вар.	Функция	Отрезок, содержащий корень	Точность нахождения корня
1	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,5x + e^{0,5x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
2	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,5} (\ln 0,5x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
3	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-3x^2} - 0,2x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
4	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,45x + e^{0,4x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
5	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,4} (\ln 0,6x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
6	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-2,8x^2} - 0,4x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
7	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,4x + e^{0,3x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
8	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,3} (\ln 0,7x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
9	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-2,6x^2} - 0,6x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
10	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,35x + e^{0,2x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-3}

№ вар.	Функция	Отрезок, содержащий корень	Точность нахождения корня
11	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,2} (\ln 0,8x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
12	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-2,4x^2} - 0,8x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
13	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,3x + e^{0,1x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
14	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,1} (\ln 0,9x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
15	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-2,2x^2} - x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
16	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,25x + e^{0,1x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
17	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,2} (\ln 0,1x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
18	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-2x^2} - 1,2x^2) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}
19	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,2x + e^{0,2x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10^{-2}
20	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,3} (\ln 1,1x + x) dx$	[0,2; 8]	10^{-3}

№ вар.	Функция	Отрезок, содержащий корень	Точность нахождения корня
21	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-1,8x^2} - 1,4x^2) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻²
22	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,15x + e^{0,3x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10 ⁻³
23	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,4} (\ln 1,2x + x) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻²
24	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-1,6x^2} - 1,6x^2) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻³
25	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,1x + e^{0,4x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10 ⁻²
26	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,5} (\ln 1,3x + x) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻³
27	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-1,4x^2} - 1,8x^2) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻²
28	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} \frac{\ln 0,05x + e^{0,5x}}{\sin x + 1,5} dx$	[0,2; 8]	10 ⁻³
29	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} x^{0,6} (\ln 1,4x + x) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻²
30	$f(\alpha) = \int_{0,1}^{\alpha} (e^{-1,2x^2} - 2,0x^2) dx$	[0,2; 8]	10 ⁻³

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений n -го порядка называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6.1)$$

Решением этой системы является значение неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n . Коэффициенты матрицы a_{ij} и правые части b_i предполагаются заданными. Условием существования и единственности системы (6.1) является неравенство нулю определителя матрицы

$$\det a_{ij} \neq 0 \quad (6.2)$$

В дальнейшем предполагается, что это условие всегда выполнено.

1. Метод Гаусса (схема единственного деления)

Идея метода Гаусса основана на последовательном исключении неизвестных и преобразовании системы (6.1) к специфическому виду (6.3) системы с треугольной матрицей (прямой ход метода):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \phantom{+ a_{23}^{(2)}x_3 +} \dots \\ \phantom{+ a_{23}^{(2)}x_3 +} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \phantom{+ a_{23}^{(2)}x_3 +} \phantom{x_{n-1} +} a_{n,n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \quad (6.3)$$

После этого осуществляется последовательное определение неизвестных x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 (обратный ход метода).

Метод Гаусса относится к группе так называемых «точных» методов, теоретически он позволяет с помощью конечного числа действий вычислить точный результат. Однако при практических расчетах возникают вычислительные погрешности, которые искажают результат тем сильнее, чем выше порядок системы. Условием сходимости метода является отличие от нуля определителя матрицы системы. При программировании метода и отладке программы целесообразно по окончании прямого хода вывести для контроля треугольную матрицу.

Алгоритм метода

1. Положить $s = 1$.
2. Для $j = s + 1, s + 2, \dots, n$ положить $a_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{ss}}$.
3. Положить $b_s = \frac{b_s}{a_{ss}}$.
4. Положить $i = s + 1$
5. Для $j = s + 1, s + 2, \dots, n$ положить $a_{ij} = a_{ij} - a_{is} \cdot a_{sj}$
6. Положить $b_i = b_i - b_s a_{is}$; $i = i + 1$.
7. Если $i \leq n$, перейти к шагу 5.
8. Положить $s = s + 1$; если $s \leq n - 1$, то перейти к шагу 2, в противном случае к шагу 9.
9. Вычислить $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
10. Положить $s = s - 1$
11. Вычислить $x_s = b_s - \sum_{k=s+1}^n a_{sk} x_k$
12. Если $s \geq 2$, то перейти к шагу 10.

2. Метод простой итерации

Идея метода состоит в том, чтобы, задавшись некоторыми значениями неизвестных $x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}$ (начальным приближением), с помощью вычислительной процедуры получить «уточненные» значения неизвестных $x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}$. Это уточнение продолжается до тех пор, пока значения $x_1 \dots x_n$ не будут вычислены с заданной точностью. Для применения метода система (6.1) должна быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \dots - \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \quad (6.4)$$

Рабочая формула метода:

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \\ \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \end{cases} \quad (6.5)$$

для $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$.

Условие сходимости метода $\|\alpha\| < 1$, где $\|\alpha\|$ – норма матрицы α_{ij} .

Критерий окончания вычислительного процесса

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность вычислений.

Методы простой итерации относятся к группе «приближенных» методов. Это значит, что они дают за конечное число действий лишь приближенный результат, однако этот результат может удовлетворять пользователя своей точностью. Критерием сходимости методов так же является условие $\|\alpha\| < 1$. Под нормой матрицы можно понимать любое из следующих чисел:

$$\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \quad (6.6)$$

$$\|\alpha\|_2 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \quad (6.7)$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} \quad (6.8)$$

При программировании метода полезно организовать выдачу на экран всех последовательных приближений. Задавая значения коэффициентов α_{ij} , необходимо убедиться в выполнении условия сходимости. В качестве начального приближения, если нет иных соображений, можно выбрать нулевые значения $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ или значения правых частей $x_i = \beta_i$.

Алгоритм метода

1. Зададимся значениями x_1, x_2, \dots, x_n .
2. Для $i=1, 2, \dots, n$ вычислим значения $y_i = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$.
3. Найти величину δ – наибольшую из разностей $|x_i - y_i|$ для $i = 1, 2, \dots, n$.
4. Если $\delta < \varepsilon$, то y_i – искомые значения, и вычисления можно закончить.
5. Для $i = 1, 2, \dots, n$ присвоить x_i значение y_i .
6. Перейти к шагу 2.

Решить систему уравнений, с коэффициентами, заданными в таблице 5, методами Гаусса и простой итерации. Во втором случае предварительно определить норму матрицы. Если не будет выполняться условие сходимости, то путем линейных комбинаций в системе уравнений привести ее к сходящемуся виду.

Таблица 5. Варианты заданий к лабораторной работе №6.

№ вар.	Матрица коэффициентов				Свободные члены
	при x_1	при x_2	при x_3	при x_4	
1	3	5	3	4	-3
	8	0,2	-3,3	4	-4
	-1	4	2	3,5	1,1
	-7	-5	0	4,5	9
2	-9	0	0,2	5	-1
	5,5	4,2	-2	-8	-4,4
	3	6	2,1	-1,8	3
	-5	-8	2,2	7,5	8,8
3	33	10	-10	55	-12
	-21	5	88	-15	29
	13	31	-18	52	66
	13	17	51	22	-19
4	3,1	5,1	2,2	5,7	-3
	3,4	4,7	2,4	5,5	-4
	3,6	5,7	2,3	6,7	-4
	3	4,4	2,1	6	5
5	2,8	2,3	4	4,4	-5
	2,1	5,2	4,5	5,5	-6,2
	3,3	-6,3	-2,1	2	2,9
	9,3	-3,9	-2,8	3,7	4,7
6	1,1	1,3	3,2	0,8	2
	2,2	-1,4	5,5	0	3,3
	4	9,8	5,4	3,4	2,7
	3,8	-11	8,8	4,5	6,3
7	5,8	4,8	4,7	5,3	-9,1
	4,7	4,9	6,6	-2,2	-8,1
	7,2	6,4	3,5	5,4	-3,4
	9,2	8,2	8,8	1,9	-5,1
8	2,8	-3,2	4,3	6,7	12,8
	3,1	5,7	6,2	3,5	13,1
	4,8	6,1	6,6	-9	11,6
	-1,9	3,4	-5,6	-4,9	-15,5
9	2,8	-3,2	0,8	-3,1	6,3
	7,7	2,3	7,1	-4,3	7,1
	4,8	8,1	3	5,2	-5,9
	9	4,3	0	-0,9	4,3
10	7,6	0	12,3	9,9	18
	8,7	12,1	3,9	8	12,5
	0	6	7,4	9,3	-14,7
	5,6	8,4	10,2	6,7	11,9

№ вар.	Матрица коэффициентов				Свободные члены
11	9,5	7,3	-5,2	2,5	5,1
	8,8	8,4	8,7	-5,3	7
	4	8,8	9,9	3	3,1
	7,3	-8,5	5,9	8,5	7,8
12	6,4	9,7	-7	3,5	-7
	8,8	2,9	-9,6	1,6	-9,8
	1	2,4	-3	4,2	-7,1
	6	8,5	-9,3	7,3	-2,2
13	4,7	5	9	9	-4,7
	-2,7	3,7	3	-1,9	-6,7
	6,9	4,7	4,4	7,1	-5,8
	6,4	-5	-2,3	1,7	-1,7
14	4,3	6,2	1,5	6,3	8,1
	4,3	7,5	3,3	5,4	5,4
	4,7	2	8,3	8,6	3,7
	3,9	4,7	6	7,1	7,5
15	13	91	21	96	4
	80	89	54	91	84
	62	14	18	63	82
	59	39	36	88	16
16	15	81	73	19	62
	59	12	63	77	-8,9
	67	97	23	59	96
	84	47	78	35	-38
17	6,9	8,3	3,7	-5,5	-8,1
	-4,1	6,4	6,5	1,9	-3,9
	6,3	0,9	2,1	2,2	1,4
	9,6	9,5	8,8	2,1	8,9
18	6	7	-5	4	-8
	9	8	0	-8	2
	3	-5	7	8	3
	4	-8	1	1	2
19	3	-7	-3	5	4
	2	7	8	-1	-3
	-2	5	9	-2	8
	3	-8	2	1	5
20	1,5	3,9	0,8	9	-0,3
	2,3	-3	4,1	-8,2	1,5
	4,4	5	-0,9	7,6	9
	1,8	0,2	6,2	-3	0,1

№ вар.	Матрица коэффициентов				Свободные члены
21	1,3	1,9	7,3	4,6	9,8
	4	3,9	8,7	3,7	1,9
	3,6	7,3	1,3	6,5	0,7
	6,2	0,9	7,3	4,3	6,5
22	4,3	6,5	0,3	6,2	0,8
	4	7,6	5,4	0,7	2,5
	0,9	7,3	7,6	9,8	3,3
	3,9	8,5	0,3	6,8	7,5
23	0,9	9,8	7,7	4	0,9
	5,4	1	5,8	4,4	0,3
	8,8	4,1	6,7	2	9,6
	3,9	2	6,7	4,7	2,9
24	50	29	70	83	64
	7	61	76	99	20
	67	80	63	7	28
	9	67	43	63	7
25	28	9	70	43	64
	7	28	43	3	54
	75	98	76	37	65
	86	40	35	87	33
26	2	85	72	90	64
	67	61	96	37	54
	63	32	94	84	65
	35	29	73	16	33
27	3,9	8,5	0,3	2	8,3
	7,1	3,4	9,7	6,7	6,2
	9,6	7,1	3,9	3,1	0
	1,7	4	7,3	8,7	3,1
28	5	9,8	3,7	3,9	8,6
	2,5	1,7	0,1	7,8	4,1
	0	2	7,4	0,3	3,1
	7,5	1	3,2	1	7
29	3,9	5,3	0,3	2,4	7,5
	0,7	3,2	0,9	7,3	4,3
	6,5	0,3	2,8	7,5	6,5
	4,1	7,3	5,4	3,1	7
30	9,5	0,9	7,3	1	3,1
	7	8,4	3	6,7	5
	6,3	0	2,8	0,7	4,3
	4,2	8,8	4	3,2	0,2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Определение собственных векторов и собственных значений матрицы

Собственными значениями матрицы называются корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения n -го порядка

$$\det |A - \lambda E|, \quad (7.1)$$

где A - матрица $n \times n$.

E - единичная матрица порядка n .

Собственные значения матрицы могут быть упорядоченными по величине $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$, ставится задача отыскания наибольшего собственного значения λ_{max} .

Собственным вектором матрицы A , соответствующим i -тому собственному значению λ_i называется решение \bar{x}_i системы

$$A\bar{x}_i = \lambda_i \bar{x}_i. \quad (7.2)$$

В силу того, что система однородна, собственный вектор \bar{x}_i определяется с точностью до произвольного постоянного множителя.

Поскольку любой произвольный n -мерный вектор \bar{a} может быть разложен по собственным векторам \bar{x}_i

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i, \quad (7.3)$$

то при подстановке вектора \bar{a} в систему получим

$$A\bar{a} = A \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \bar{x}_i = \lambda_1 \left(c_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \bar{x}_i \right)$$

$$A^2 \bar{a} = A \left(c \lambda_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \bar{x}_i \right) = \lambda_1^2 \left[c_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^2 \bar{x}_i \right]$$

$$A^3 \bar{a} = \lambda_1^3 \left[c_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^3 \bar{x}_i \right] \quad \text{и так далее.}$$

В общем случае

$$A^k \bar{a} = \lambda_1^k \left[c_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \bar{x}_i \right]. \quad (7.4)$$

Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$, то величины $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ то есть при достаточно больших k

$$A^k \bar{a} \approx \lambda_1^k c_1 \bar{x}_1$$

или $A^{k+1} \bar{a} \approx \lambda_1 c_1 \lambda_1^k \bar{x}_1 \approx A^k \bar{a} \lambda_1$.

Таким образом, выбрав произвольный вектор \bar{a} и, умножая его последовательно на матрицу A k раз, получим, что λ_1 является коэффициентом пропорциональности в соотношении

$$A^{k+1} \bar{a} = \lambda_1 A^k \bar{a}, \quad (7.5)$$

причем точность этого равенства повышается с ростом k .

Тогда $\lambda_1 \approx \frac{\|A^{k+1} \bar{a}\|}{\|A^k \bar{a}\|}$, где $\|\bar{x}\|$ - норма вектора \bar{x} .

Алгоритм метода

1. Выберем произвольный вектор $\bar{u}_0 = (1, 0, \dots, 0)$.
2. Вычислим вектор $\bar{u}_1 = A\bar{u}_0$ и первое приближение собственного значения $\lambda_1^{(1)} = \frac{\|\bar{u}_1\|}{\|\bar{u}_0\|}$, где $\|\bar{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.
3. Вычислим вектор $\bar{u}_2 = A\bar{u}_1$ и второе приближение собственного значения $\lambda_1^{(2)} = \frac{\|\bar{u}_2\|}{\|\bar{u}_1\|}$.
4. Если $|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}| < \varepsilon$ то $\lambda_1^{(2)}$ - приближенное значение первого собственного значения, \bar{u}_2 - приближенное значение собственного вектора. Если $|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}| > \varepsilon$ то положить $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$ и перейти к шагу 3.

Варианты заданий приведены в таблице 5 к лабораторной работе 6. Заданная точность вычислений $\varepsilon = 10^{-3}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Интерполяция сеточных функций полиномами

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ задано $n+1$ точек x_0, x_1, \dots, x_n , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n, \quad (8.1)$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (интерполирующая функция), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$. При использовании интерполяционной формулы Лагранжа функция $F(x)$ является полиномом $L_n(x)$ степени не выше n , который выражается следующей формулой:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (8.2)$$

или

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (8.3)$$

Таким образом, для решения данной задачи необходимо организовать тройной циклический процесс, два цикла которого предназначены для вычисления одной точки полинома $L_n(x)$.

Используя интерполяционную формулу Лагранжа, вывести в виде таблицы значения функции $f(x)$ для точек x с заданным шагом, если известны значения функции $f(x_i)$ в узлах x_i .

Блок-схема алгоритма для данного примера приведена на рис. 11, варианты заданий в табл. 6.

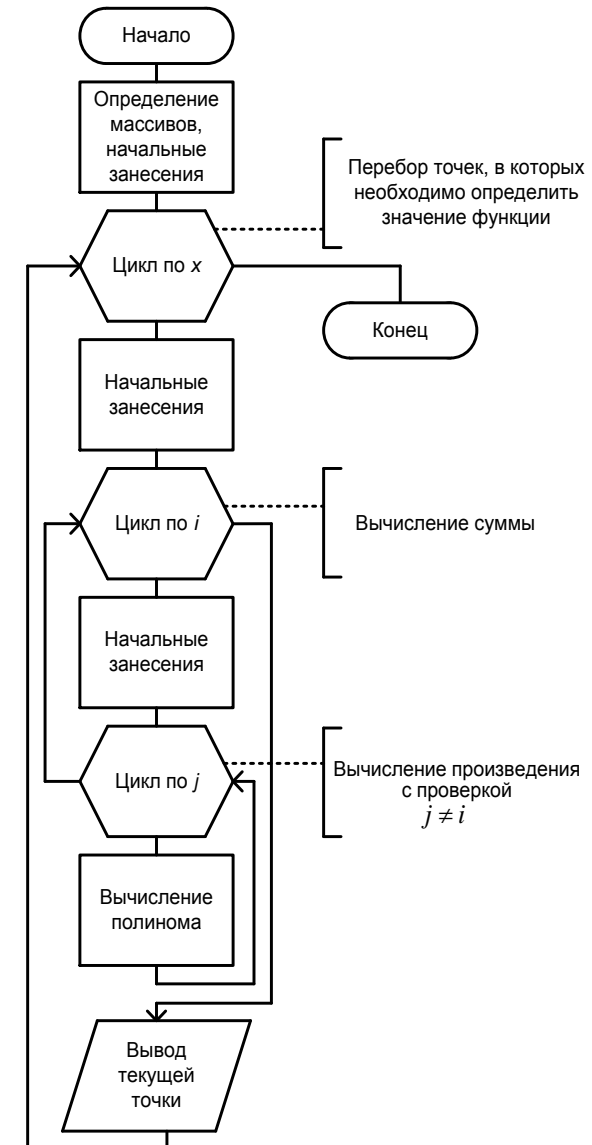


Рис. 11. Блок-схема алгоритма интерполирования функции.

Таблица 6. Варианты заданий к лабораторной работе № 8.

№ вар		Значения i								Отрезок интерполирования		
		0	1	2	3	4	5	6	7	$x_{нач}$	$x_{кон}$	$шаг$
1	x_i	1,3	1,5	2,4	3,8	5	6,8	7,1	8,2	1,5	8	0,5
	y_i	0,3	2,2	6,4	5,9	1	-0,2	-1,3	0			
2	x_i	1,5	2,1	2,9	3,1	3,4	3,8	4,6	5,2	1,6	5	0,2
	y_i	2,4	5	6,9	4,7	2,5	-3,9	-1,4	0,6			
3	x_i	1,7	6	7,4	10,5	12,8	15	16,1	19,8	4	18	1
	y_i	5,7	6,4	6,5	4,2	2,1	5	9,8	16,6			
4	x_i	0,06	0,15	0,22	0,28	0,48	0,57	0,7	0,89	0,1	0,85	0,05
	y_i	0,6	2,7	-2,8	2,2	0,5	-7,8	-2,1	10,9			
5	x_i	1,1	1,3	1,6	2,1	2,2	2,6	2,9	3	1,2	2,8	0,1
	y_i	2,1	2,8	-4,4	3,6	-8,7	7,2	7,6	3,4			
6	x_i	8,11	8,44	8,7	9,01	9,55	9,66	9,9	10,2	8	10	0,1
	y_i	4,2	7,1	5,4	4	6,7	7,3	8,6	9,2			
7	x_i	0,21	0,43	0,75	1	1,11	1,37	1,72	1,9	0,3	2	0,1
	y_i	6,9	6,7	1,3	7,3	9,4	7,6	5,2	3,9			
8	x_i	0,99	1,13	1,25	1,39	1,5	1,62	1,78	1,88	1	1,8	0,05
	y_i	1,4	1,7	2,9	1,3	-1,6	-3,3	-9,6	-6			
9	x_i	2,3	2,8	4,1	4,5	5,2	5,9	7	7,9	2,6	7,2	0,2
	y_i	5,85	9	7,2	4,3	-0,1	-2,9	-1,8	0,1			
10	x_i	0,77	0,9	0,94	0,96	0,99	1	1,17	1,3	0,9	1,2	0,02
	y_i	11,6	7,3	3,1	1,7	0,3	-0,1	-2,6	0,5			
11	x_i	0	0,25	0,35	0,5	0,75	0,95	1,2	1,5	0,1	1,3	0,1
	y_i	9,4	6,7	4	2,5	0,8	3,3	5,6	7,1			
12	x_i	-1	0	0,7	1,2	1,9	4	4,3	4,9	0	4,5	0,5
	y_i	2,4	2,9	4	0,3	-5,2	-8,3	-9	3,2			
13	x_i	0,5	1,2	1,7	2,2	3,1	3,5	3,9	4,1	1	4	0,2
	y_i	9,9	5,3	-3,2	-6,5	-1,7	0,95	3	5,4			
14	x_i	1,3	1,9	2,8	3,7	4,2	5,1	5,8	6,9	2	6	0,2
	y_i	13,5	7,4	-0,7	-2,4	0,6	4	0,3	-0,4			
15	x_i	0,3	0,9	1,1	1,8	2,1	2,8	3,4	3,9	0,6	3,4	0,2
	y_i	7,2	5,8	4,4	0,2	2	3,4	-1,2	-3,7			

№ вар		Значения i								Отрезок интерполирования		
		0,1	1,5	1,8	2,2	2,9	3,4	4,5	5	0,5	4,5	0,5
16	x_i	0,1	1,5	1,8	2,2	2,9	3,4	4,5	5	0,5	4,5	0,5
	y_i	-3,2	-6,8	-4,3	-2,2	1,3	5,1	4,2	7,3			
17	x_i	1,2	1,8	2,6	3,1	3,6	4,5	5,6	6,2	2	6	0,2
	y_i	6,5	-3,1	0,1	1,7	-4,1	0,2	8,7	7,3			
18	x_i	0,5	1,3	2	2,6	3,9	5,2	6,5	7,3	1	7	0,5
	y_i	7,3	6,2	3,7	3,9	5,6	3,3	5,5	8,5			
19	x_i	-1,2	-0,6	-0,3	0,3	0,7	1	1,3	1,9	-1	1	0,1
	y_i	15,7	12,1	8,7	9	9,6	3,7	-5,8	-7,4			
20	x_i	3,2	4,3	5	6,7	7,5	8,2	9,1	10	4	9	0,5
	y_i	4,4	2,5	-0,7	-6,8	-7,6	-3,3	6,5	8,5			
21	x_i	1,2	1,31	1,35	1,43	1,5	1,69	1,82	2	1,3	1,8	0,05
	y_i	6	3,4	2,9	3,2	3,8	3,1	6,5	25			
22	x_i	1	1,4	1,8	2,1	2,7	3,1	3,4	3,6	1,5	3,5	0,1
	y_i	9	4,1	-5,4	-6,2	-8,5	-5	-2,8	7,7			
23	x_i	23	28	32	40	43	50	57	62	25	60	5
	y_i	99	55	12	5	-3	10	21	44			
24	x_i	0,9	0,96	1	1,12	1,25	1,29	1,35	1,4	0,95	1,35	0,05
	y_i	20	47	37	16	-29	-37	-4	15			
25	x_i	5	6	8	11	13	16	20	23	6	22	1
	y_i	46	42	38	72	61	33	24	0			
26	x_i	0	1,3	2,9	4	5,5	7,8	9	11	1	10	0,5
	y_i	16	2	72	83	98	42	34	77			
27	x_i	-1,2	-0,9	-0,5	-0,1	0,1	0,5	1	1,2	-1	1	0,1
	y_i	1,2	-0,6	-2,2	2,4	5,8	4	-2,7	-5,9			
28	x_i	1	9	15	23	30	31	33	36	5	35	2
	y_i	70	28	2	9	41	37	23	18			
29	x_i	2,8	4,1	6,6	7,5	9,5	10,3	12	12,8	4	12	0,5
	y_i	15	6,4	1,2	-6,8	-14	-7,3	0,3	9,8			
30	x_i	-1,2	-0,7	-0,4	0,2	0,8	1,5	2,4	3	-1	2,6	0,2
	y_i	0,5	0,3	-0,2	0,24	0,72	0,95	0,29	-0,5			

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

Среднеквадратичное приближение сеточных функций

Дана сеточная функция $y(x)$, заданная на системе узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$ своими значениями в узлах $\{y_i\}_{i=1}^n$. Известно, что по системе n узлов можно построить интерполяционный полином порядка $n-1$, который будет принимать во всех узлах в точности предписанные значения. Однако, во многих практически важных случаях необходимо построить полином степени меньше, чем $n-1$, приближающий данную сеточную функцию «в среднем». В этом случае можно сформулировать задачу отыскания такого полинома порядка $m < n-1$:

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m \quad (9.1)$$

при котором «невязка», то есть суммарное отличие значений полинома в узлах от значений сеточной функции, было бы наименьшим. Если записать выражение для «невязки» в виде

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [P_m(x_i) - y_i]^2, \quad (9.2)$$

то условиями для определения коэффициентов полинома $\{a_j\}_{j=0}^m$ будут необходимые условия минимума функции многих переменных $S(a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Таким образом, коэффициенты $\{a_j\}_{j=0}^m$ могут быть найдены из решения системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (9.3)$$

Для получения рабочих формул метода продифференцируем выражение для «невязки» $S = \sum_{i=1}^n [P_m(x_i) - y_i]^2$ по a_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n [P_m(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_j} [P_m(x_i) - y_i]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n 2[P_m(x_i) - y_i] \frac{\partial P_m(x_i)}{\partial a_j} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Поскольку $P_m = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ то $\frac{\partial P_m(x_i)}{\partial a_j} = x_i^j$ и условие $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0$ приводит к уравнению:

$$2 \sum_{i=1}^n [P_m(x_i) - y_i] x_i^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (9.5)$$

Преобразуем выражение суммы

$$\sum_{i=1}^n [P_m(x_i) - y_i] x_i^j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^m a_k x_i^k - y_i \right) x_i^j = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+j} - \sum_{i=1}^n y_i x_i^j. \quad (9.6)$$

Следовательно, неизвестные коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m можно найти, решив систему из $m+1$ линейного уравнения

$$a_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i^j \right) + a_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i^{j+1} \right) + \dots + a_m \left(\sum_{i=1}^n x_i^{j+m} \right) = \sum_{i=1}^n y_i x_i^j. \quad (9.7)$$

Алгоритм метода

1. Зададим узловые значения функции y_i и узлы x_i для $i = 1 \div n$.
2. Вычислим матрицу α размером $(m+1) \times (m+1)$:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n x_k^{i+j-1}, \quad \text{для } i, j = 1 \div (m+1).$$

3. Вычислим правые части системы $\alpha \cdot \bar{a} = \bar{b}$:

$$b_i = \sum_{k=1}^n y_k x_k^{i-1}, \quad \text{для } i = 1 \div (m+1).$$

4. Решив систему уравнений методом Гаусса, получим ее решение:

$$a_j, \quad j = 1 \div (m+1).$$

5. Вычислим значения найденного полинома в узловых точках

$$P_i = \sum_{j=1}^{m+1} a_j x_i^{j-1}, \quad i = 1 \div n$$

и вычислим «невязки» в узлах $\delta_i = P_i - y_i$.

Варианты заданий приведены в табл. 7. Значения найденного полинома степени m искать только в узловых точках.

Таблица 7. Варианты заданий к лабораторной работе № 9.

№ вар		Значения i								m
		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	x_i	0,3	0,9	1,1	1,8	2,1	2,8	3,4	3,9	3
	y_i	7,2	5,8	4,4	0,2	2	3,4	-1,2	-3,7	
2	x_i	0,1	1,5	1,8	2,2	2,9	3,4	4,5	5	4
	y_i	-3,2	-6,8	-4,3	-2,2	1,3	5,1	4,2	7,3	
3	x_i	1,2	1,8	2,6	3,1	3,6	4,5	5,6	6,2	3
	y_i	6,5	-3,1	0,1	1,7	-4,1	0,2	8,7	7,3	
4	x_i	0,5	1,3	2	2,6	3,9	5,2	6,5	7,3	4
	y_i	7,3	6,2	3,7	3,9	5,6	3,3	5,5	8,5	
5	x_i	-1,2	-0,6	-0,3	0,3	0,7	1	1,3	1,9	3
	y_i	15,7	12,1	8,7	9	9,6	3,7	-5,8	-7,4	
6	x_i	3,2	4,3	5	6,7	7,5	8,2	9,1	10	4
	y_i	4,4	2,5	-0,7	-6,8	-7,6	-3,3	6,5	8,5	
7	x_i	1,2	1,31	1,35	1,43	1,5	1,69	1,82	2	3
	y_i	6	3,4	2,9	3,2	3,8	3,1	6,5	25	
8	x_i	1	1,4	1,8	2,1	2,7	3,1	3,4	3,6	4
	y_i	9	4,1	-5,4	-6,2	-8,5	-5	-2,8	7,7	

№ вар		Значения i								m
		9	x_i	23	28	32	40	43	50	
y_i	99	55	12	5	-3	10	21	44		
10	x_i	0,9	0,96	1	1,12	1,25	1,29	1,35	1,4	4
	y_i	20	47	37	16	-29	-37	-4	15	
11	x_i	5	6	8	11	13	16	20	23	3
	y_i	46	42	38	72	61	33	24	0	
12	x_i	0	1,3	2,9	4	5,5	7,8	9	11	4
	y_i	16	2	72	83	98	42	34	77	
13	x_i	-1,2	-0,9	-0,5	-0,1	0,1	0,5	1	1,2	3
	y_i	1,2	-0,6	-2,2	2,4	5,8	4	-2,7	-5,9	
14	x_i	1	9	15	23	30	31	33	36	4
	y_i	70	28	2	9	41	37	23	18	
15	x_i	2,8	4,1	6,6	7,5	9,5	10,3	12	12,8	3
	y_i	15	6,4	1,2	-6,8	-14	-7,3	0,3	9,8	
16	x_i	1,3	1,5	2,4	3,8	5	6,8	7,1	8,2	4
	y_i	0,3	2,2	6,4	5,9	1	-0,2	-1,3	0	
17	x_i	1,5	2,1	2,9	3,1	3,4	3,8	4,6	5,2	3
	y_i	2,4	5	6,9	4,7	2,5	-3,9	-1,4	0,6	
18	x_i	1,7	6	7,4	10,5	12,8	15	16,1	19,8	4
	y_i	5,7	6,4	6,5	4,2	2,1	5	9,8	16,6	
19	x_i	0,06	0,15	0,22	0,28	0,48	0,57	0,7	0,89	3
	y_i	0,6	2,7	-2,8	2,2	0,5	-7,8	-2,1	10,9	
20	x_i	1,1	1,3	1,6	2,1	2,2	2,6	2,9	3	4
	y_i	2,1	2,8	-4,4	3,6	-8,7	7,2	7,6	3,4	

№ вар		Значения i								m
21	x_i y_i	8,11 4,2	8,44 7,1	8,7 5,4	9,01 4	9,55 6,7	9,66 7,3	9,9 8,6	10,2 9,2	3
22	x_i y_i	0,21 6,9	0,43 6,7	0,75 1,3	1 7,3	1,11 9,4	1,37 7,6	1,72 5,2	1,9 3,9	4
23	x_i y_i	0,99 1,4	1,13 1,7	1,25 2,9	1,39 1,3	1,5 -1,6	1,62 -3,3	1,78 -9,6	1,88 -6	3
24	x_i y_i	2,3 5,85	2,8 9	4,1 7,2	4,5 4,3	5,2 -0,1	5,9 -2,9	7 -1,8	7,9 0,1	4
25	x_i y_i	0,77 11,6	0,9 7,3	0,94 3,1	0,96 1,7	0,99 0,3	1 -0,1	1,17 -2,6	1,3 0,5	3
26	x_i y_i	0 9,4	0,25 6,7	0,35 4	0,5 2,5	0,75 0,8	0,95 3,3	1,2 5,6	1,5 7,1	4
27	x_i y_i	-1 2,4	0 2,9	0,7 4	1,2 0,3	1,9 -5,2	4 -8,3	4,3 -9	4,9 3,2	3
28	x_i y_i	0,5 9,9	1,2 5,3	1,7 -3,2	2,2 -6,5	3,1 -1,7	3,5 0,95	3,9 3	4,1 5,4	4
29	x_i y_i	1,3 13,5	1,9 7,4	2,8 -0,7	3,7 -2,4	4,2 0,6	5,1 4	5,8 0,3	6,9 -0,4	3
30	x_i y_i	0,3 7,2	0,9 5,8	1,1 4,4	1,8 0,2	2,1 2	2,8 3,4	3,4 -1,2	3,9 -3,7	4

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

Шаговые методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

Дано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y(x))$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Необходимо вычислить сеточное представление y_i частного решения $y = y(x)$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению и начальному условию.

Численные методы решения задачи Коши делятся на шаговые и разностные. К шаговым относятся методы Эйлера, Рунге-Куты, Гилла. К разностным – Адамса, Милна, Штермера, Гаусса и другие.

1. Метод Эйлера

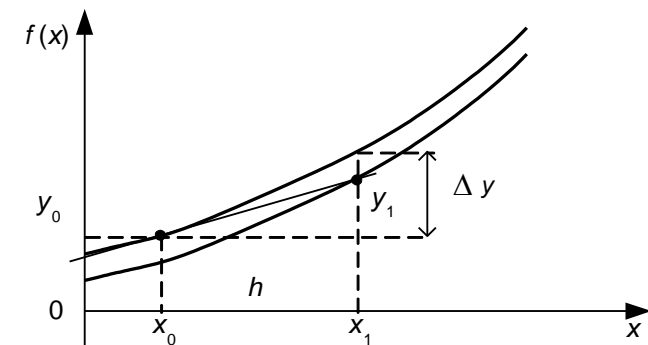


Рис. 12. Решение дифференциального уравнения методом Эйлера.

Решение задачи в конечном итоге сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \quad (10.1)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \quad (10.2)$$

Если принять $f(x, y(x)) = \text{const}$ (метод левых прямоугольников), то

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f(x_i, y(x_i)) \quad (10.3)$$

– рабочая формула метода Эйлера.

Алгоритм метода

1. Задаем h , начальные значения x_0, y_0, i .
2. Вычисляем y_{i+1} .
3. Изменяем i и x .
4. Если найдены все точки, то конец, иначе перейти к шагу 2.

2. Метод Эйлера-Коши

При интегрировании дифференциального уравнения (10.1) по формуле трапеций, получаем уравнение

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y(x_i)) + f(x_i + h, y(x_i + h))] \quad (10.4)$$

Выражение $y(x_i + h)$ из правой части находится по методу Эйлера (10.3). Таким образом, рабочие формулы метода Эйлера-Коши имеют вид:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_i + h f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)] \end{aligned} \quad (10.5)$$

Алгоритм метода Эйлера-Коши аналогичен алгоритму метода Эйлера.

3. Модифицированный метод Эйлера

В данном методе при интегрировании уравнения (10.1) применяется формула центральных прямоугольников:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (10.6)$$

Неизвестная $y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ находится также по методу Эйлера (10.3).

Рабочие формулы модифицированного метода Эйлера:

$$\begin{aligned} y_{i+1/2}^* &= y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}^*\right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

Алгоритм аналогичен алгоритму метода Эйлера.

4. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Из широкого класса методов типа Рунге-Кутты наиболее широко используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

При разложении $y(x_i + h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i до четвертого порядка малости получаем:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_i) \quad (10.8)$$

Решение ищется в виде $y(x_i + h) = y(x_i) + \Delta_i$,

где $\Delta_i = a_1 k_{1i} + a_2 k_{2i} + a_3 k_{3i} + a_4 k_{4i}$.

Итоговая рабочая формула:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= h f(x_i, y_i) \\ k_{2i} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1i}}{2}\right) \\ k_{3i} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2i}}{2}\right) \\ k_{4i} &= h f(x_i + h, y_i + k_{3i}) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}}{6} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Алгоритм аналогичен методу Эйлера. Варианты заданий приведены в таблице 8.

Таблица 8. Варианты заданий к лабораторной работе № 10.

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Начальные условия	Отрезок интегрирования	Шаг интегрирования	Метод интегрирования
1	$y' + y = \frac{1}{\cos x}$	$y(0)=1$	[0;0,5]	0,05	Рунге-Кутта
2	$(1+x^2)y' + 1 = 0$	$y(0)=1$	[0;0,5]	0,025	Модифиц. Эйлера
3	$y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$	$y(0)=1$	[0;0,5]	0,025	Эйлера-Коши
4	$y' + 4y = e^{3x}(13x-7)$	$y(0)=0$	[0;0,2]	0,02	Рунге-Кутта
5	$y' + 3y = x$	$y(0)=0,5$	[0;1]	0,05	Модифиц. Эйлера
6	$y' - y = \sin x + \cos 2x$	$y(0)=1,8$	[0;2]	0,1	Эйлера-Коши
7	$y' + 3y = e^{5x}$	$y(0)=2,2$	[0;0,2]	0,01	Рунге-Кутта
8	$y' + 4y = \cos 3x$	$y(0)=0,8$	[0;1]	0,05	Модифиц. Эйлера
9	$y' - 6y = 2e^{4x}$	$y(0)=1,433$	[0;0,5]	0,025	Эйлера-Коши
10	$2y' - y = 5xe^x$	$y(0)=1$	[0;1]	0,1	Рунге-Кутта
11	$y' - 6y = 3x^2 - x - 1$	$y(0)=-0,9$	[0;1]	0,1	Модифиц. Эйлера
12	$2y' - 3y = x + 5$	$y(0)=1/9$	[0;1]	0,05	Эйлера-Коши
13	$(1+x^2)y' - 2y = 0$	$y(1)=5/6$	[1;2]	0,05	Рунге-Кутта
14	$4y' + 5y = -3x$	$y(0)=1,48$	[0;0,5]	0,02	Модифиц. Эйлера
15	$5y' - 6y = e^x$	$y(0)=0$	[0;0,2]	0,01	Эйлера-Коши

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Начальные условия	Отрезок интегрирования	Шаг интегрирования	Метод интегрирования
16	$3y' + 2y = x^2 - 3x$	$y(0)=5,1$	[0;1]	0,05	Рунге-Кутта
17	$y' + y = 1 + e^x$	$y(0)=2,5$	[0;1]	0,05	Модифиц. Эйлера
18	$2y' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 8x$	$y(1)=4$	[1;1,5]	0,05	Эйлера-Коши
19	$(x^2 + 4)y' - xy = 0$	$y(1)=5$	[1;1,5]	0,05	Рунге-Кутта
20	$2y' + y = xe^x$	$y(0)=1$	[0;0,5]	0,02	Модифиц. Эйлера
21	$-3y' + 2y = 2\sin x$	$y(0)=2,6$	[0;1]	0,05	Эйлера-Коши
22	$2,5y'x - y = 0$	$y(1)=2$	[1;2]	0,1	Рунге-Кутта
23	$3y' + xy = \sin x$	$y(1)=1,38$	[1;2]	0,1	Модифиц. Эйлера
24	$-4xy' + 6y = 2$	$y(1)=1,433$	[1;2]	0,05	Эйлера-Коши
25	$y' - y = e^{2x}(x-1)$	$y(0)=11/9$	[0;1]	0,05	Рунге-Кутта
26	$6y' + 2y = -\cos 2x$	$y(0)=1,95$	[0;0,5]	0,02	Модифиц. Эйлера
27	$0,5y' + 0,5y = -3e^{\frac{x}{2}}$	$y(0)=-4$	[0;1]	0,1	Эйлера-Коши
28	$4y' + 4y = 2x - 3$	$y(0)=-1/4$	[0;0,5]	0,025	Рунге-Кутта
29	$y' + y = x^2 - x + 2$	$y(0)=1$	[0;1]	0,1	Модифиц. Эйлера
30	$y' + 4y = 3\sin x + \sin 2x$	$y(0)=1$	[0;1]	0,05	Эйлера-Коши

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11

Интегрирование дифференциального уравнения разностным методом Адамса

Введем сетку значений аргумента $x_i = x_0 + ih$, где $h = \text{const}$ – шаг сетки, $i = 0, 1, 2, \dots$. Сеточное представление частного решения $y_i = y(x_i)$. Для его определения существуют шаговые методы, в которых очередное сеточное значение определяется по данному:

$$y_{i+1} = V(y_i), \quad (11.1)$$

и разностные методы, в которых очередное сеточное значение определяется по нескольким предыдущим

$$y_{i+1} = W(y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots). \quad (11.2)$$

Формула разностного метода Адамса может быть получена, если проинтегрировать исходное дифференциальное уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и подынтегральную функцию в правой части уравнения заменить интерполяционным полиномом Ньютона для интерполирования в конце таблицы.

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f_i + \frac{\Delta f_{i-1}}{h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 f_{i-2}}{h^2 2!} \times \right. \\ \left. \times (x - x_i)(x - x_{i-1}) + \frac{\Delta^3 f_{i-3}}{h^3 3!} (x - x_i)(x - x_{i-1})(x - x_{i-2}) + \dots \right] dx \quad (11.3)$$

Ограничиваясь полиномом третьего порядка и проведя интегрирование полинома, получим рабочую формулу, в которой значение конечных разностей заменены их выражениями через значения в узлах сетки:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \\ f_s = f(x_s, y_s) \quad (11.4)$$

При использовании разностного метода Адамса проблемой является получение первых, так называемых «стартовых» точек, в нашем примере это y_0, y_1, y_2, y_3 . Они могут быть получены с помощью шаговых методов точности не ниже третьего порядка, например методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Алгоритм метода.

1. Определяем стартовые точки y_0, y_1, y_2, y_3 . Присваиваем значения $A = y_0, B = y_1, C = y_2, D = y_3$.
2. Вычисляем $f_A = f(x_0, A), f_B = f(x_1, B), f_C = f(x_2, C), f_D = f(x_3, D)$.
3. Вычисляем новые значения сеточной функции

$$y = D + \frac{h}{24} [55f_D - 59f_C + 37f_B - 9f_A]$$

4. Если $x_3 + h \geq x_{\text{кон}}$, то конец вычислений, в противном случае перейдем к шагу 5.
5. Переприсваиваем $x_3 = x_3 + h, f_A = f_B, f_B = f_C, f_C = f_D, f_D = f(x_3, y), D = y$.
6. Переход к шагу 3.

Дифференциальные уравнения к вариантам заданий приведены в таблице 8 лабораторной работы №10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 12

Поиск экстремумов многомерной функции методом градиента

Методы оптимизации (поиска экстремумов) очень широко используются на практике. Существует большое разнообразие численных методов оптимизации, различающихся по размерности решаемой задачи (одно- и многомерные), по наличию ограничений (безусловные и условные), по способу формирования шага (градиентные, безградиентные, случайного поиска) и по другим признакам. Как правило, численные методы отыскания экстремума состоят в построении последовательности векторов $\{\bar{X}^{(k)}\}$, при поиске минимума удовлетворяющих условию:

$$f(\bar{X}^{(0)}) > f(\bar{X}^{(1)}) > \dots > f(\bar{X}^{(n)}). \quad (12.1)$$

Обычно ищется минимум, отсюда и название – методы спуска, а к максимуму перейти достаточно просто.

В данных методических указаниях рассматриваются только градиентные методы без ограничений. В этих методах элементы последовательности $\{\bar{X}^{(k)}\}$ вычисляются по формуле:

$$\bar{X}^{(k+1)} = \bar{X}^{(k)} + \alpha_k \bar{P}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (12.2)$$

где $\bar{P}^{(k)}$ – направление спуска, α_k – длина шага в этом направлении.

Направлением спуска является антиградиент:

$$\bar{P}^{(k)} = -\bar{f}'(\bar{X}^{(k)}) \quad (12.3)$$

а длина шага в различных методах определяется по-разному.

Метод градиента в чистом виде формирует шаг по переменным как функцию от градиента заданной функции f в текущей точке поиска. Простейший алгоритм поиска минимума для двумерной функции записывается в скалярном виде в соответствии с формулой:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - h \frac{df}{dx_i} \\ y_{i+1} = y_i - h \frac{df}{dy_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12.4)$$

Величина рабочего шага в направлении антиградиента зависит как от самого градиента, так и от коэффициента пропорциональности h , с помощью которого можно управлять эффективностью метода. Существуют разновидности метода как с постоянным, так и с переменным шагом. Последние здесь не рассматриваются.

Для оценки частных производных в общем случае используются разные методы с двумя вариантами:

1. Алгоритм с центральной пробой

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + g_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{g_i}.$$

2. Алгоритм с парными пробами

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + g_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - g_i, \dots, x_n)}{2 \cdot g_i},$$

где g_i – пробный шаг по i -ой переменной, выбираемый достаточно малым для разностной оценки производной.

Условием окончания поиска минимума может являться условие, когда величина модуля градиента менее заданной точности ε .

Пример

Требуется найти минимум функции

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

с заданными начальными координатами $x = 0.5$; $y = 0.5$ и точностью вычислений $\varepsilon = 10^{-3}$.

Зададимся значениями пробного шага $g = 10^{-3}$ и коэффициента шага $h = 0.3$. Обычно данный коэффициент приходится подбирать вручную. Так, при $h = 0.1$ минимум находится за 32 шага, а при $h = 1$ процесс не сходится. Поэтому надо вводить вторую проверку окончания цикла: по количеству приближений.

Если выводить промежуточные результаты вычислений, то получим следующую таблицу:

Таблица 9. Пример вывода результатов к работе № 12.

№	x	y	df/dx	df/dy	$ \text{grad } f(x,y) $	$f(x,y)$
1	0.5000	0.5000	0.8776	0.8776	1.2411	0.4794
2	0.2367	0.2367	0.4705	0.4705	0.6654	0.1118
3	0.0956	0.0956	0.1911	0.1911	0.2703	0.0183
4	0.0382	0.0382	0.0765	0.0765	0.1082	0.0029
5	0.0153	0.0153	0.0306	0.0306	0.0433	0.0005
6	0.0061	0.0061	0.0122	0.0122	0.0173	0.0001
7	0.0024	0.0024	0.0049	0.0049	0.0069	0.0000
8	0.0010	0.0010	0.0020	0.0020	0.0028	0.0000
9	0.0004	0.0004	0.0008	0.0008	0.0011	0.0000
10	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0000

Использовать для **четных** вариантов точность $\varepsilon = 10^{-3}$, алгоритм оценки частных производных – парные пробы. Для **нечетных** вариантов точность $\varepsilon = 10^{-2}$, алгоритм оценки частных производных – центральная проба. Варианты заданий приведены в таблице 9.

Таблица 10. Варианты заданий к лабораторной работе № 12.

№	Функция	Начальное приближение	
		x_0	y_0
1	$0.75 \cdot e^{\sqrt{\sin[(x+0.4)^2+(y+1.2)^2]+1+0.23x^2+0.08y^2}}$	-1.25	-1.95
2	$\sin(0.3x^2+0.2 \cdot (y-0.32)^2) + \cos(0.47 \cdot (x+0.25)^2+0.34 \cdot (y-0.21)^2)+0.23x^2$	-2.5	5.2
3	$\sin(0.22 \cdot (x-0.1)^2+0.2 \cdot (y-0.32)^2) + 0.43x^2+1.97 \cdot (y-0.34)^2-0.45xy$	-2	5
4	$e^{0.085x^2+0.12y^2+0.022xy} + \sin(0.22x+0.8y+1.3)+0.43x^2$	-3	-3
5	$e^{0.033x^2+0.028y^2-\sin(0.38x-1.12)}-0.24y^2+0.69xy$	-4	11
6	$e^{0.4x^2+y+\sin(1.8x-1.12y)}+e^{0.2y^2+x+\cos(1.44x+1.85y)}$	-2.5	0.2
7	$0.43x^2+0.32y^2-0.45xy + \sin(0.3x^2)+\cos(0.34 \cdot (y-0.21)^2)$	3	-1

№	Функция	Начальное приближение	
8	$0.42x^2 + 0.37y^2 + \sin\left(0.06 \cdot (x-0.18)^2 + 0.098 \cdot (y-0.31)^2 + 0.67 + e^{0.1x^2 + 0.25y^2}\right)$	-3	0
9	$e^{\sqrt{0.23x^2 + 0.26y^2} + \sin(0.8x-1.1) + \cos(1.1y+0.75x) + 0.71xy}$	-4	1
10	$0.82 \cdot e^{\sqrt{\sin\left[(x+0.2)^2 + (y-1.5)^2\right] + 1.2 + 0.23x^2 + 0.21y^2 + 0.75xy}}$	-2.1	0.05
11	$\sin\left(0.3 \cdot (x-0.13)^2 + 0.2 \cdot (y+0.22)^2\right) + 3.1 \cdot \cos\left(0.88x^2 + 0.78 \cdot (y-0.12)^2\right) + 0.39x^2 + 0.46y^2$	-2	-1.2
12	$\sin\left(0.67 \cdot (x-0.85)^2 + 1.2 \cdot (y-1.3)^2\right) + 2.73 \cdot (x+0.25)^2 + 3.07 \cdot (y-0.77)^2 - 1.79xy$	0	5
13	$e^{0.12x^2 + 0.1y^2 - 0.082xy} + \sin(1.2x + 0.35y - 1.3) + 0.35x^2$	-2.5	-0.5
14	$e^{0.093x^2 - \sin(0.89x-1.02) + \cos(1.55y+0.2x) + 0.88y^2 + 0.45xy}$	0.8	-5

№	Функция	Начальное приближение	
15	$e^{0.82x^2 - y + \sin(2.8x + 2.2y)} + e^{0.77y^2 - x + \cos(1.4x + 1.8y)}$	0.5	2.6
16	$0.13x^2 + 0.22y^2 + 0.45xy + \sin\left(0.6 \cdot (x-0.39)^2\right) + \cos\left(0.8 \cdot (y-0.2)^2\right)$	-2	1
17	$1.72x^2 + 1.07y^2 + \sin\left(0.48 \cdot (x+0.8)^2 + 0.85 \cdot (y+0.3)^2 - 1.7 + e^{0.17x^2 + 0.15y^2}\right)$	2	0
18	$e^{\sqrt{0.57x^2 + 0.63y^2} + \sin(1.25x+1.3) + \cos(1.1y+0.9x) + 0.25xy}$	-4	0
19	$1.1 \cdot e^{\sqrt{\sin\left[(x+0.4)^2 + (y+1.2)^2\right] - 5.37 + 6 + 0.87x^2 + 0.09y^2}}$	-1.2	-1.9
20	$\sin\left((x-0.73)^2 + 0.33y^2\right) + \cos\left(0.51 \cdot (x-0.79)^2 + 1.35 \cdot (y-1.38)^2\right) + 0.78x^2 + 0.91y^2$	1.5	1.3
21	$\sin\left(0.5 \cdot (x+0.25)^2 - 1.13 \cdot (y+0.88)^2\right) + 2.02 \cdot (x+0.89)^2 + 2.77 \cdot (y+0.51)^2 + 1.66xy$	0	3
22	$e^{0.033x^2 + 0.028y^2 - 0.032xy} + \sin(1.09x + 0.75y - 1) - 0.4y^2$	8	10

№	Функция	Начальное приближение	
23	$e^{0.13y^2 - \sin(0.8x - 1.1) + \cos(2.1y + 0.75x)} + 1.2y^2 + 0.71xy$	-4	-1
24	$e^{0.23x^2 + y + \sin(2.8x + 3.2y + 1)} + e^{0.18y^2 + x + \cos(3.4x + 3.7y)}$	0.5	0.5
25	$0.15x^2 + 0.2y^2 + 0.28xy + \sin(0.06 \cdot (x - 0.18)^2) + \cos(0.098 \cdot (y - 0.31)^2)$	-5	-5
26	$1.1x^2 + 1.23y^2 + \sin(0.4 \cdot (x + 0.9)^2 + 0.8 \cdot (y + 0.3)^2 + e^{0.23x^2 + 0.34y^2})$	-1	-1
27	$e^{\sqrt{0.57x^2 + 0.63y^2} + \sin(1.67x + 0.3) + \cos(1.98y + 0.66x)} + 0.3xy$	2	-4
28	$e^{\sqrt{\sin[(x-0.1)^2 + (y-0.2)^2]} \cdot 2.97 + 3 + 0.155x^2 + 0.097y^2}$	-0.9	-0.3
29	$\sin(3.45 \cdot (x - 1.03)^2 + 0.1 \cdot (y - 0.67)^2) + \cos((x - 0.09)^2 + 2.3 \cdot (y - 1.08)^2) + 2.27x^2 + 2.72y^2$	1.5	1.3
30	$\sin(1.7 \cdot (x - 0.15)^2 - 1.4 \cdot (y - 0.5)^2) + 2.8 \cdot (x + 0.3)^2 + 3.7 \cdot (y + 0.7)^2 + 2.7xy$	2	-1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13

Поиск экстремумов многомерной функции методом тяжелого шарика

Данный метод базируется на аналогии с движением материального шарика по наклонной поверхности. Шарик будет стремиться занять нижнее положение, то есть точку минимума, со скоростью в зависимости от крутизны наклона, его массы и вязкости среды. Эти параметры влияют на характер движения шарика.

Для двумерной функции траектория поиска в дискретном варианте описывается в соответствии с (13.1).

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \alpha(x_i - x_{i-1}) - h \frac{df}{dx_i} \\ y_{i+1} = y_i - \alpha(y_i - y_{i-1}) - h \frac{df}{dy_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.1)$$

При $\alpha = 0$ метод превращается в обыкновенный градиентный, при $\alpha = 1$ процесс поиска не затухает. То есть эффективность метода зависит не только от h и начальных условий, но и от $0 < \alpha < 1$. Первый шаг делается обычным методом градиента, так как значение предыдущей точки еще неизвестно.

Варианты заданий приведены в таблице 10 к лабораторной работе №12. Использовать для **нечетных** вариантов точность $\varepsilon = 10^{-3}$, алгоритм оценки частных производных – парные пробы. Для **четных** вариантов точность $\varepsilon = 10^{-2}$, алгоритм оценки частных производных – центральная проба. Так же необходимо ограничить количество шагов на уровне 30-100.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14

Поиск экстремумов многомерной функции методом наискорейшего спуска

Основным недостатком градиентного метода является необходимость частого вычисления производных от заданной функции. В методе наискорейшего спуска длина шага a_k определяется из условия:

$$f\left(\bar{X}^{(k)} - \alpha_k \bar{f}'\left(\bar{X}^{(k)}\right)\right) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(\bar{X}^{(k)} - \alpha \bar{f}'\left(\bar{X}^{(k)}\right)\right) \quad (14.1)$$

то есть на каждом шаге находится оптимальное значение a , минимизирующее одномерную функцию по направлению антиградиента: один раз вычисляется градиент и ищется минимум по этому направлению.

Для двумерной функции $f(x, y)$ a_k определяют следующим образом. После определения градиента минимизируемой функции делается шаг в направлении, обратном градиенту и пропорциональный ему (чем меньше крутизна функции, тем меньше и шаг):

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n - \alpha_0 f'_x \\ y_{n+1}^* = y_n - \alpha_0 f'_y \end{cases} \quad (14.2)$$

Если значение целевой функции при этом уменьшилось по сравнению с исходным

$$f(x_n, y_n) > f(x_{n+1}^*, y_{n+1}^*),$$

то делается очередной рабочий шаг в том же направлении:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n - i\alpha_0 f'_x \\ y_{n+1}^* = y_n - i\alpha_0 f'_y \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (14.3)$$

Если же после очередного шага значение целевой функции увеличилось по сравнению с предыдущим значением, то движение прекращается:

$$\alpha_k = \alpha_0(i-1),$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \alpha_k f'_x \\ y_{n+1} = y_n - \alpha_k f'_y \end{cases},$$

и заново определяется значение градиента. Перед началом следующего цикла проверяется точность нахождения минимума, которую приближенно можно оценить по величине градиента:

$$(f'_x)^2 + (f'_y)^2 \leq \varepsilon^2 \quad (14.4)$$

Определенные трудности представляет выбор a_0 , от которого зависит сходимость метода. Если a_0 мало, то процесс будет сходиться медленно, в противном случае может оказаться, что при первом же рабочем шаге в очередном приближении значение функции увеличится, и новое приближение будет равно старому. Поэтому необходимо предусмотреть проверку: a_k должно быть больше нуля.

Кроме этого, количество приближений n должно быть меньше заранее заданного числа N .

Блок-схема алгоритма для данного метода приведена на рис. 13.

При выполнении работы считать $\varepsilon=0,1$; $N=20$; $a_0=0,1$. Частные производные определить аналитически. Если процесс расходится, необходимо считать с двойной точностью.

Варианты заданий представлены в табл. 11.

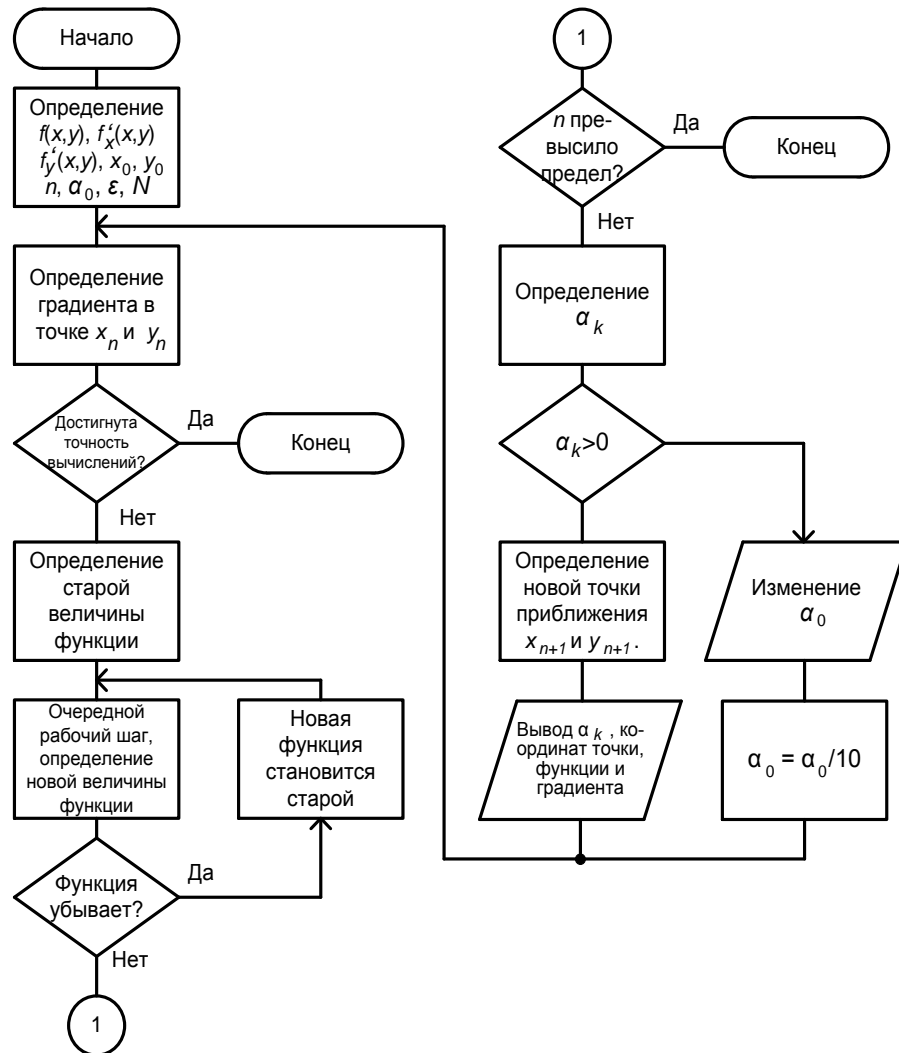


Рис. 13. Блок-схема алгоритма метода наискорейшего спуска.

Таблица 11. Варианты заданий к лабораторной работе № 14.

№ вар.	Минимизировать функцию
1	$f(x, y) = x - 1,4y + e^{0,01x^2 + 0,11y^2}$
2	$f(x, y) = 2x - 1,3y + e^{0,04x^2 + 0,12y^2}$
3	$f(x, y) = 3x - 1,2y + e^{0,02x^2 + 0,13y^2}$
4	$f(x, y) = 4x - 1,1y + e^{0,16x^2 + 0,14y^2}$
5	$f(x, y) = 5x - by + e^{0,25x^2 + 0,15y^2}$
6	$f(x, y) = 6x - 0,9y + e^{0,36x^2 + 0,16y^2}$
7	$f(x, y) = 7x - 0,8y + e^{0,49x^2 + 0,17y^2}$
8	$f(x, y) = 8x - 0,7y + e^{0,64x^2 + 0,18y^2}$
9	$f(x, y) = 9x - 0,6y + e^{0,81x^2 + 0,19y^2}$
10	$f(x, y) = 10x - 0,5y + e^{0,94x^2 + 0,2y^2}$
11	$f(x, y) = 11x - 0,4y + e^{x^2 + 0,21y^2}$
12	$f(x, y) = 12x - 0,3y + e^{1,21x^2 + 0,22y^2}$
13	$f(x, y) = 13x - 0,2y + e^{1,44x^2 + 0,23y^2}$
14	$f(x, y) = 14x - 0,1y + e^{1,69x^2 + 0,24y^2}$
15	$f(x, y) = 15x + e^{1,96x^2 + 0,25y^2}$

№ вар.	Минимизировать функцию
16	$f(x, y) = 16x + e^{1,99x^2 + 0,26y^2}$
17	$f(x, y) = 17x + 0,1y + e^{2,56x^2 + 0,27y^2}$
18	$f(x, y) = 18x + 0,2y + e^{2,89x^2 + 0,28y^2}$
19	$f(x, y) = 19x + 0,3y + e^{3,24x^2 + 0,29y^2}$
20	$f(x, y) = 20x + 0,4y + e^{3,81x^2 + 0,3y^2}$
21	$f(x, y) = 21x + 0,5y + e^{4x^2 + 0,31y^2}$
22	$f(x, y) = 22x + 0,6y + e^{5,02x^2 + 0,32y^2}$
23	$f(x, y) = 23x + 0,7y + e^{4,84x^2 + 0,33y^2}$
24	$f(x, y) = 24x + 0,8y + e^{5,29x^2 + 0,34y^2}$
25	$f(x, y) = 25x + 0,9y + e^{5,76x^2 + 0,35y^2}$
26	$f(x, y) = 26x + y + e^{6,25x^2 + 0,36y^2}$
27	$f(x, y) = 27x + 1,1y + e^{6,76x^2 + 0,37y^2}$
28	$f(x, y) = 28x + 1,2y + e^{6,98x^2 + 0,38y^2}$
29	$f(x, y) = 29x + 1,3y + e^{7,29x^2 + 0,39y^2}$
30	$f(x, y) = 30x + 1,4y + e^{8,41x^2 + 0,4y^2}$